Das Oka-Grauert-Prinzip für Kozyklen mit Werten in Bündeln von nicht-abelschen Gruppen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.

im Fach Mathematik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin
am 08.05.2013

von
Dipl.-Math. Karl-Florian Erich Platt

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Jan-Hendrik Olbertz

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II

Prof. Dr. Elmar Kulke

Gutachter

1. Prof. Dr. Jürgen Leiterer
2. Prof. Dr. George Marinescu
3. Prof. Dr. Egmont Porten

Tag der Verteidigung

13.12.2013

Zusammenfassung

Ein bedeutender Satz von L. Bungart und H. Grauert besagt, dass für eine Gruppe G von invertierbaren Elementen einer Banachalgebra, je zwei G-wertige holomorphe Kozyklen über einer beliebigen Steinschen Mannigfaltigkeit holomorph äquivalent sind, wenn sie dort stetig äquivalent sind. Eine einfachere Form dieses Satzes wurde erstmals von K. Oka bewiesen. Aussagen dieser Art werden deshalb auch Okasche Prinzipe oder Oka-Grauert-Prinzipe genannt.
Der Bungart-Grauert-Satz ist auch in dem Fall von Bedeutung, in dem die Steinsche Mannigfaltigkeit ein Gebiet in der komplexen Ebene ist. Man kann deshalb in der Literatur auch direkte Beweise für den Spezialfall finden, in dem ein G-wertiger, holomorpher, stetig trivialer Kozyklus betrachtet wird. Dieser ist nach dem oben erwähnten Satz, dann auch holomorph trivial.
Ziel diser Dissertation ist es, den Bungart-Grauert-Satz für Gebiete in der komplexen Ebene auch im allgemeinen Fall zu beweisen. Dieser direkte Beweis ist wesentlich einfacher als der bisherige und muss nicht, wie bei L. Bungart und H. Grauert, auf eine Theorie von mehren Veränderlichen zurückgreifen. Wie in den Arbeiten von L. Bungart und H. Grauert gezeigt, kann dies durch das sogenannte Verdrillen, eine Methode aus einer allgemeinen Theorie von holomorphen Kozyklen mit Werten in Bündeln von Gruppen, erzielt werden. Der größte Teil der Dissertation besteht deshalb darin, eine solche Theorie im Fall von Gebieten in der komplexen Ebene direkt aufzubauen.

Abstract

An important theorem of L. Bungert and H. Grauert says that for the group G of invertible elements of a Banachalgebra, two holomorphic, G-valued cocycles over a Stein manifold, which are continuously equivalent, are holomorphically equivalent there. A simpler form of that theorem was first proven by K. Oka. That's why theorems like this are known as Oka-Grauert-priciples as well.
The Bungart-Grauert theorem is also significant if the Stein manifold is a domain in the complex plane. That's why direct proofs of the special case, in which a continuously trivial, holomorphic cocycle is considered, can be found in literature. Following the Bungart-Grauert theorem mentioned above, such a cocycle is also holomorphically trivial.
The goal of this thesis is to prove the general case of the Bungart-Grauert theorem for a domain in the complex plane directly. That direct proof is much more simple han the old one. Furthermore this direct proof doesn't have to resort to a theory of multiple variables, unlike the proof from L. Bungart and H. Grauert does. As shown in the original works, such a proof can be archieved by using the so-called twisting. Twisting is a method from a theory of holomorphic cocycles with values in bundles of groups. In the main part of this thesis such a theory is build directly for domains in the complex plane.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Banachraum-Bündel **5**

2.1 Grunddefinitionen 5
2.2 Hochheben von Schnitten 10
2.3 Holomorphe Kozyklen mit Werten in Banachraum-Bündeln 21
2.4 Rechtsinvertierbare Homomorphismen 26

3 Bündel von nicht-abelschen Gruppen **37**

3.1 Innere Bündel 37
3.2 Formulierung des Hauptresultates 41
3.3 Das Cartansche Lemma 45
3.4 Einfache Erweiterungen 58
3.5 Eine spezielle Garbe von Gruppen 65
3.6 Verdrillte Bündel 74

4 Anhang: Abstrakte Garben **77**

Literaturverzeichnis **85**

1 Einleitung

Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit ist das Verhalten von holomorphen Kozyklen mit Werten in nicht-abelschen Gruppen. Es sei dazu eine offene Untergruppe G einer Banachalgebra mit Einselement, ein Gebiet $X \subseteq \mathbb{C}$ und eine diskrete, bezüglich X abgeschlossene Menge $Z \subset X$ gegeben. Des Weiteren sei jedem Punkt $w \in Z$ eine natürliche Zahl $n_w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zugeordnet. Dann bezeichnen wir für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $\mathcal{F}(U)$ die Gruppe aller holomorphen Abbildungen $f : U \to G$ mit der Eigenschaft

$$\|f(z) - 1\| = O\left(|z - w|^{n_w}\right)$$

für jedes $w \in Z$ und $z \to w$. Ist nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so heißt eine Familie $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ von Abbildungen $g_{ij} \in \mathcal{F}\left(U_i \cap U_j\right)$ $\mathcal{F}$**-Kozyklus**, wenn

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$, $i, j, k \in I$, gilt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass daraus sofort die Eigenschaften $g_{ii} = 1$ und $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ folgen. Dabei interessieren uns insbesondere die folgenden beiden Sätze, welche vergleichsweise einfache Spezialfälle einer sehr viel tieferliegenden Theorie über holomorphe Kozyklen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten, die 1957 begründet wurde, sind. Vergleiche dazu [Gr1], [Gr2] und [Gr3].

Satz 1.1. *Sei G zusammenhängend. Dann gibt es für jeden $\mathcal{F}$-Kozyklus $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ eine Familie $\{h_i\}_{i \in I}$ von Abbildungen $h_i \in \mathcal{F}\left(U_i\right)$ mit der Eigenschaft*

$$g_{ij} = h_i h_j^{-1}.$$

Dabei kann auf die Voraussetzung an G, zusammenhängend zu sein, nicht verzichtet werden. Im nicht-zusammenhängenden Fall hat man stattdessen folgendes Resultat:

Satz 1.2. *Seien $\{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ und $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ zwei $\mathcal{F}$-Kozyklen und sei eine Familie $\{c_i\}_{i\in I}$ von stetigen Abbildungen $g_i : U_i \to G$ gegeben, so dass die folgenden beiden Bedingungen gelten:*

1. *$f_{ij} = c_i^{-1} g_{ij} c_j$ auf $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$.*
2. *Für jeden Punkt $w \in Z \cap U_i$ gehört $c_i(w)$ zur Zusammenhangskomponente des Einselementes von G.*

Dann gibt es eine Familie $\{h_i\}_{i\in I}$ von Abbildungen $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit der Eigenschaft

$$f_{ij} = h_i^{-1} g_{ij} h_j$$

auf $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$.

Im Fall skalarer Funktionen wurde dieser Satz erstmals von K. Oka in der Arbeit [O] bewiesen. Deshalb werden Aussagen dieser Art Okasche Prinzipe genannt. Für die zusammenhängende Gruppe $G = GL(r, \mathbb{C})$ und dem Fall $Z = \emptyset$ ist Satz 1.1 in Satz 7 von [Gr3] und in Satz 3 von [Rö] enthalten. Zudem ist er für $G = GL(r, \mathbb{C})$, im allgemeinen Fall, eine Spezialisierung von Satz 1 aus [FR]. Darüber hinaus sind die Sätze 1.1 und 1.2 für allgemeine Gruppen G in [Bu], Bemerkung 4.4, falls $Z = \emptyset$, und in [L1], Theorem 2.2.3, und [L2], Theorem 3.8, für beliebige Mengen Z zu finden.
Da die Sätze 1.1 und 1.2 jedoch auch in der oben angegebenen Form, also für eine Veränderliche, von Bedeutung sind, wurde 2009 das Buch [GL] veröffentlicht. In diesem befinden sich eine Reihe von Anwendungen der Sätze 1.1 und 1.2 sowie ein direkter Beweis des Satzes 1.1. Dieser ist wesentlich einfacher als der Beweis der allgemeinen Version. An dieser Stelle wollen wir auf einen Fehler in diesem Buch hinweisen. Es wird behauptet, dass Satz 1.1 auch dann gilt, wenn G nicht zusammenhängend ist aber X einfach zusammenhängt. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie in dem, zu diesem Zeitpunkt, unveröffentlichtem Erratum [L4] nachzulesen sein wird. Um den Umfang des Buches in Grenzen zu halten, haben die Autoren J. Leiterer und I. Gohberg auf einen direkten Beweis von Satz 1.2 verzichtet.
Ziel dieser Dissertation ist es die in [GL] beschriebene Theorie von Kozyklen mit Werten in einer Gruppe zu einer Theorie von Kozyklen mit Werten in Bündeln von Gruppen über X zu erweitern und somit eine andere Erweiterung, Satz 3.13, von Satz 1.1 und Satz 1.2 zu erhalten. Dieser Satz, 3.13, ist das Hauptresultat dieser Arbeit. Aus dieser können wir dann Satz 1.2 ableiten, ohne auf die oben erwähnte Theorie mehrerer Veränderlicher zurückgreifen zu müssen. Wir werden dabei wie folgt vorgehen.
In Abschnitt 2.1 führen wir den Begriff eines Banachraum-Bündels ein. Zudem notieren wir einige wichtige Eigenschaften dieser Bündel sowie ihnen anverwandte Begriffe.

Ziel des Abschnitts 2.2 ist dann zwei bestimmte Homomorphismen Φ und Ψ zu definieren und deren für uns wichtigste Eigenschaft, den Satz 2.21, zu beweisen. Mit diesem Satz werden wir im selben Abschnitt eine neue Variante des Approximationssatzes von Runge beweisen und später, in Abschnitt 2.3, kurze, exakte Sequenzen konstruieren, welche wir für den Beweis von Satz 2.31 benötigen. Dieser Satz 2.31 ist das Kernstück von Abschnitt 2.3 und gibt an, unter welchen Umständen additive Kozyklen mit Werten in Banachraum-Bündeln zerfallen. Wir stützen uns in diesen drei Abschnitten auf Ideen aus [L3]. Diese können wir jedoch nicht einfach zitieren, da der für uns wichtige Fall von eventuell nicht-trivialen Banachraum-Bündeln dort nicht umfasst wird.
In dem Kapitel 2 abschließenden Abschitt 2.4 beschäftigen wir uns mit holomorphen Operatorfunktionen mit rechtsinvertierbaren Werten. Insbesondere interessieren uns dabei Fragen der Rechtsinvertierbarkeit und die Eigenschaften der Kerne solcher Operatoren. Mit Hilfe dieser Operatorfunktionen werden wir dann die Eigenschaften von holomorphen Homomorphismen zwischen Banachraum-Bündeln untersuchen. Dabei stehen die Bündeleigenschaften des Kernes solcher Homomorphismen, Satz 2.39 und Satz 2.40, sowie die Rechtsinvertierbarkeit, insbesondere Satz 2.43, im Vordergrund. Die dort erzielten Resultate, für deren Beweise unter anderem Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 benötigt werden, sind von entscheidender Wichtigkeit beim Beweis einer neuen Version des Cartanschen Lemmas, Satz 3.21, aus Abschnitt 3.3. Wir gehen zu gegebener Zeit näher darauf ein. Die Resultate aus Abschnitt 2.4 können erstmals, im allgemeinen Fall von Steinschen Mannigfaltigkeiten, bei M. A. Shubin, siehe [S], gefunden werden. Es sei an dieser Stelle auch auf die kürzlich erschienenen Arbeiten von J. Leiterer und L. Rodman [LR] sowie W. Kaballo [K] hingewiesen, in denen ähnliche Resultate behandelt werden.
In Kapitel 3 werden wir das oben erwähnte Hauptresultat, Satz 3.13, formulieren und beweisen. Dazu führen wir in Abschitt 3.1 den Begriff eines inneren Bündels ein und zeigen dort, dass auf diesem stets eine Norm gewählt werden kann. Nach dem Wissensstand des Autors wird dieser Begriff erstmals in dieser Dissertation verwendet. Es handelt sich um eine unserer Situation angepasste Spezialisierung des Bündelbegriffes, wie er in [Gr3] und in [Bu] verwendet wird. Mit Hilfe dieser inneren Bündel können wir dann, in Abschnitt 3.2, den Begriff eines holomorphen G-Bündels definieren und mit diesem das Hauptresultat, Satz 3.13, formulieren. Zudem werden wir dort zeigen, dass man den Beweis von Satz 3.13 auf einen Spezialfall, den Fall $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$, reduzieren kann.
Um auch den Spezialfall von Satz 3.13 zeigen zu können benötigen wir unter anderem eine neue Version des Cartanschen Lemmas. Diese wird in Abschnitt 3.3, und somit erstmals in dieser Dissertation, vorgestellt und bewiesen. Für die Beweise der dort erzielten Aussagen sind, wie oben bereits erwähnt, unter anderem Resultate aus Kapitel 2, Abschnitt 2.4, von Nöten. Inspiration zu den Resultaten und ihren Beweisen waren Ideen aus [L1], [L2] und [GL].

In Abschnitt 3.4 werden wir den oben genannten Spezialfall von Teil 1 von Satz 3.13 zeigen. Dieser ist eine Verallgemeinerung von Satz 1.1. Wir werden dazu Ketten von einfachen Erweiterungen benutzen. Diese Idee stammt von J. Leiterer, dem Betreuer des Autors. Sie wurde in einer unveröffentlichten Ausarbeitung niedergeschrieben, welche ursprünglich für das Buch [GL] vorgesehen war, später aber nicht verwendet wurde. Der zweite Teil des Hauptresultates, oder genauer dessen oben genannter Spezialfall, wird in Abschnitt 3.5, mit Hilfe der dort eingeführten Garbe ρ bewiesen. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Satz 3.40, welcher eine Aussage über das Zerfallen von Kozyklen mit Werten in ρ macht. Im Beweis dieses Satzes wird das Cartansche Lemma angewendet. Die Einführung dieser Garbe ρ ist eine Grundidee von H. Grauert aus den Arbeiten [Gr1], [Gr2] und [Gr3]. Der hier geführte Beweis ist nach Kenntnis des Autors erstmals in dieser Dissertation für nur eine Veränderliche niedergeschrieben worden. Den Abschluss von Kapitel 3 bildet Abschnitt 3.6. In diesem wird der Spezialfall von Teil 3 von Satz 3.13, eine Verallgemeinerung von Satz 1.2, gezeigt. Die dazu verwendete Methode des Verdrillens geht der Kenntnis des Autors nach auf H. Grauert zurück, vergleiche dazu [Gr1], [Gr2] und [Gr3], und wurde seitdem von einer Vielzahl von Autoren verwendet.
Am Ende der Arbeit geben wir noch Definitionen und Resultate aus der Garbentheorie an. Dazu dient Kapitel 4. Diese Resultate sind gut bekannt. Sie können zum Beispiel in [H] nachgelesen werden. Ein Spezialfall von Satz 4.9 und von Satz 4.12 ist auch in [GL] zu finden.

Der Autor möchte an dieser Stelle besonders Herrn Prof. J. Leiterer, dafür dass er die Aufmerksamkeit des Autors auf dieses Thema gelenkt hat und während der Ausarbeitungszeit regelmäßig mit Gesprächen zur Seite standt, danken. Zudem sei den Professoren J. Brüning und M. Staudacher für die finanzielle Unterstützung und gute universitäre Zusammenarbeit gedankt. Der Autor möchte abschließend seiner Lebenspartnerin Frau Diana Schmidt, für Ihre Geduld und Hilfe bei der Überprüfung der Grammatik, sowie Herrn Dipl.-Math. Jan-Thierry Wegener, für die Beantwortung diverser Fragen über den Umgang mit LaTex, danken.

2 Banachraum-Bündel

2.1 Grunddefinitionen

Wir werden in diesem Kapitel eine Reihe von Grunddefinitionen angeben, insbesondere die des holomorphen Banachraum-Bündels. Zudem wird eine wichtige Eigenschaft dieser Bündel, der Satz 2.18, vorgestellt.

Definition 2.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Unter einem* **(topologischen) Banachraum-Bündel** *über X versteht man ein Paar $(\mathcal{E}, \pi)$, wobei $\mathcal{E}$ ein Hausdorffraum und $\pi : \mathcal{E} \to X$ eine surjektive Abbildung ist, so dass es einen Banachraum E gibt, mit dem Folgendes gilt:*

1. *Für jedes $a \in X$ ist auf der Faser $\mathcal{E}_a := \pi^{-1}(a)$ die Struktur eines komplexen Vektorraumes gegeben, welche $\mathcal{E}_a$, zusammen mit der Topologie von $\mathcal{E}$, zu einem Banachraum macht.*
2. *Für jeden Punkt $a \in X$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $a \in U$ und eine homöomorphe Abbildung $\Theta : \pi^{-1}(U) \to U \times E$, so dass für alle $b \in U$*

$$\Theta\big|_{\mathcal{E}_b} : \mathcal{E}_b \to \{b\} \times E$$

   ein Banachraumisomorphismus ist.

Man nennt dann E die **charakteristische Faser** *von $\mathcal{E}$, π heißt* **Projektion** *und X* **Basis** *von $\mathcal{E}$. Wir definieren $\mathcal{E}\big|_U := \pi^{-1}(U)$ und nennen das Paar (U, Θ) eine* **(topologische) lokale Trivialisierung** *von $\mathcal{E}$. Eine Familie von Paaren $(U_i, \Theta_i)_{i \in I}$, wobei jedes Paar (U_j, Θ_j) eine lokale Trivialisierung von $\mathcal{E}$ ist, heißt* **(topologischer) Atlas** *von $\mathcal{E}$, wenn die Menge $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist.*

Bemerkung 2.2. *Wir werden in dieser Arbeit auch von einem Bündel $\mathcal{E}$ über einer Menge X sprechen ohne die Projektion π explizit zu nennen.*

Definition 2.3. *Sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel mit der charakteristischen Faser E und seien (U_1, Θ_1) sowie (U_2, Θ_2) zwei lokale Trivialisierungen von $\mathcal{E}$ mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann nennen wir die eindeutig bestimmte stetige Funktion $g_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL(E)$ mit der Eigenschaft*

$$\Theta_1 \circ \Theta_2^{-1}(z, v) = (z, g_{12}(z)(v)),$$

für jedes $z \in U_1 \cap U_2$ und $v \in E$, die **Übergangsfunktion** *von (U_2, Θ_2) nach (U_1, Θ_1). Offensichtlich ist dann g_{12}^{-1} die Übergangsfunktion von (U_1, Θ_1) nach (U_2, Θ_2).*

Bemerkung 2.4. *Sei $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von $\mathcal{E}$, E die charakteristische Faser von $\mathcal{E}$ und sei $\mathcal{C}^{GL(E)}$ die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in $GL(E)$. Dann bildet die Familie $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ der Übergangsfunktionen einen $\mathcal{C}^{GL(E)}$-Kozyklus. Wir nennen diesen Kozyklus den* **zum Atlas $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$ gehörenden** *Kozyklus.*

Definition 2.5. *Sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel, dann heißen die lokalen Trivialisierungen (U_1, Θ_1) und (U_2, Θ_2) von $\mathcal{E}$* **holomorph verträglich** *miteinander, falls entweder $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist oder $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ gilt und die Übergangsfunktion von (U_1, Θ_1) nach (U_2, Θ_2) holomorph ist.*
Ein topologischer Atlas von $\mathcal{E}$ heißt **holomorph widerspruchsfrei**, *wenn seine lokalen Trivialisierungen paarweise holomorph verträglich sind.*

Definition 2.6. *Ein topologisches Banachraum-Bündel $\mathcal{E}$, auf dem ein holomorph widerspruchsfreier Atlas ausgezeichnet ist, heißt* **holomorphes Banachraum-Bündel**. *Eine lokale Trivialisierung eines holomorphen Banachraum-Bündels heißt* **holomorphe Trivialisierung**, *wenn sie mit jeder lokalen Trivialisierung des ausgezeichneten Atlas holomorph verträglich ist. Ein Atlas eines holomorphen Banachraum-Bündels heißt* **holomorpher Atlas**, *wenn jede seiner lokalen Trivialisierungen mit allen lokalen Trivialisierungen des ausgezeichneten Atlas holomorph verträglich sind. Ein $\mathcal{O}^{GL(E)}$-Kozyklus f heißt* **assoziiert** *zu $\mathcal{E}$, wenn es einen holomorphen Atlas gibt, zu dem f gehört.*

Bemerkung 2.7. *Ist $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel, so ist $\mathcal{E}$ insbesondere eine Banachraum-Mannigfaltigkeit im Sinne von [D].*

Definition 2.8. *Sei $(\mathcal{E}, \pi)$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $V \subseteq X$. Eine Abbildung $f : V \to \mathcal{E}$ heißt* **Schnitt** *von $\mathcal{E}$, wenn für jedes $z \in V$ die Gleichung*

$$\pi \circ f(z) = z$$

gilt. Ist V offen, so heißt ein Schnitt f **holomorpher Schnitt**, *wenn für jede holomorphe Trivialisierung (U, Θ) von $\mathcal{E}$, mit $U \cap V \neq \emptyset$, die auf $U \cap V$ definierte Funktion $\Theta \circ f$ holomorph ist. Die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}$, welche jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ den Raum $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U)$ aller holomorphen Schnitte von U nach $\mathcal{E}$ zuordnet, nennen wir die* **Garbe der holomorphen Schnitte** *über $\mathcal{E}$.*

Definition 2.9. *Sei $(\mathcal{E}, \pi)$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser E. Sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $\mathcal{E}$, dann heißt das Paar $(\mathcal{F}, \pi)$* **holomorphes Unterbündel (direktes holomorphes Unterbündel)** *von $\mathcal{E}$, wenn ein abgeschlossener (stetig projizierter) Unterraum F von E existiert, so dass für jeden Punkt $z_0 \in X$ eine offene Menge $U \subseteq X$, $z_0 \in U$, und eine holomorphe Trivialisierung*

$$\Theta : \mathcal{E}\big|_U \to U \times E$$

existieren, so dass für jedes $z \in U$ gilt:

$$\Theta^{-1}(\{z\} \times F) = \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(z). \tag{2.1}$$

Bemerkung 2.10. *Ein holomorphes Unterbündel $\mathcal{F}$ eines holomorphen Banachraum-Bündels $\mathcal{E}$ ist ein holomorphes Banachraum-Bündel.*

Definition 2.11. *Sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser E. Sei zudem $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von $\mathcal{E}$. Dann ist für $x \in \mathcal{E}|_{U_i}$ und $(a,b) \in U_i \times E$, mit $\Theta_i(x) = (a,b)$, durch*

$$\|x\|_i = \|\Theta_i(x)\|_E = \|(a,b)\|_E := \|b\|_E \tag{2.2}$$

eine Norm von x definiert. Sei nun $\{\chi_i\}_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie von C^0-Funktionen $\chi_i : X \to \mathbb{R}_+$, mit den Eigenschaften supp $\chi_i \Subset U_i$ und

$$0 < \sum_{i\in I} \chi_i < \infty.$$

Dann nennen wir die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ mit

$$\|x\|_{\mathcal{E}} := \sum_{i\in I} \chi_i(a)\|x\|_i$$

für $x \in \mathcal{E}_a$ eine **Norm des Banachraum-Bündels***.*

Bemerkung 2.12. *Ein Beispiel für eine solche Familie $\{\chi_i\}_{i\in I}$ ist eine Zerlegung der Eins.*

Definition 2.13. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ zwei holomorphe Banachraum-Bündel über X. Seien $\mathcal{E}_a$ und $\mathcal{F}_a$ die Fasern von $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{F}$ über $a \in X$. Dann definieren wir die Menge*

$$Hom(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \bigcup_{a\in X} L\left(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a\right),$$

wobei $L(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen von $\mathcal{E}_a$ nach $\mathcal{F}_a$ ist. Wir setzen

$$Hom(\mathcal{E},\mathcal{F})\big|_U = \bigcup_{a\in U} L(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$$

für $U \subseteq X$ offen. Wir definieren eine Projektion $\pi_{Hom} : Hom(\mathcal{E},\mathcal{F}) \to X$ durch die Gleichung

$$\pi_{Hom}(l) = a$$

für $l \in L(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$ und $a \in X$.

Sind $\Theta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}\big|_U \to U \times E$ *und* $\Theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}\big|_U \to U \times \tilde{E}$ *holomorphe Trivialisierungen von* $\mathcal{E}$ *und* $\mathcal{F}$*, so definieren wir eine faserweise lineare, bijektive Abbildung*

$$\Theta_{\mathcal{F}} \circ \cdot \circ \Theta_{\mathcal{E}}^{-1}\big|_U : Hom(\mathcal{E},\mathcal{F})\big|_U \to U \times L(E,\tilde{E})$$

durch die Gleichung

$$\Theta_{\mathcal{F}} \circ \cdot \circ \Theta_{\mathcal{E}}^{-1}(h) = (z, f),$$

wobei $(z, f(b)) = \Theta_{\mathcal{F}} \circ h \circ \Theta_{\mathcal{E}}^{-1}(z,b)$*, für* $z \in U$*,* $b \in E$ *und* $h \in L(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$ *gilt. Das holomorphe Banachraum-Bündel, für das diese Abbildungen lokale holomorphe Trivialisierungen sind, nennen wir* **Homomorphismenbündel** *von* $\mathcal{E}$ *und* $\mathcal{F}$*. Es wird ebenfalls mit* $Hom(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *bezeichnet.*
Unter einem **stetigen bzw. holomorphen Homomorphismus** *von* $\mathcal{E}$ *nach* $\mathcal{F}$ *verstehen wir eine Abbildung* $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$*, die durch einen globalen stetigen bzw. holomorphen Schnitt* $\tilde{A} : X \to Hom(\mathcal{E},\mathcal{F})$*, wie folgt definiert wird:*

$$Ax = \tilde{A}(z)x$$

für jedes $z \in X$ *und* $x \in \mathcal{E}_z$*. Da dieses* $\tilde{A}$ *eindeutig bestimmt ist, werden wir auch* $A(z)$ *anstelle von* $\tilde{A}(z)$ *schreiben. Wir nennen* $\tilde{A}$ *den* **definierenden Schnitt von** A*.*
Einen eineindeutigen Homomorphismus nennen wir einen **Isomorphismus***. Seien nun auf* $\mathcal{E}$ *und* $\mathcal{F}$ *die Normen* $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ *und* $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ *ausgezeichnet, dann wird durch*

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathcal{E}_z, \|x\|_{\mathcal{E}}=1} \|\tilde{A}(z)x\|_{\mathcal{F}} \tag{2.3}$$

faserweise eine Operatornorm definiert. Wir nennen diese Norm die (durch $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ *und* $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ *induzierte)* **Homomorphismennorm***.*

Bemerkung 2.14. *Offensichtlich ist die Homomorphismennorm eine Norm im Sinne von Definition 2.11.*

Definition 2.15. *Sei* K *eine Teilmenge von* $X \subseteq \mathbb{C}$*. Wir nennen* K **einfach zusammenhängend bezüglich** X*, wenn jede Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus K$ *einen Punkt* $x \in \mathbb{C} \setminus X$ *enthält.*

Bemerkung 2.16. *Anders als sonst üblich, müssen hier einfach zusammenhängende Mengen nicht zusammenhängend sein.*

Wir wollen an dieser Stelle einen wohlbekannten Satz zitieren, wie er beispielsweise bei [Bu] oder [GL], Theorem 5.6.3, nachgelesen werden kann.

Satz 2.17. *Sei* E *ein Banachraum, sei* $GL(E)$ *die Menge der invertierbaren linearen Abbildungen von* E *nach* E*,sei* $X \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* G *eine offene Untergruppe von* $GL(E)$*, so dass mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *X ist einfach zusammenhängend.*
2. *G ist zusammenhängend.*

Dann ist jeder $\mathcal{O}^G$*-Kozyklus über* X *trivial.*

Satz 2.18. *Sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraumbündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser E. Sei g ein zu $\mathcal{E}$ assoziierter $\mathcal{O}^{GL(E)}$-Kozyklus, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Kozyklus g ist trivial.*
2. *$\mathcal{E}$ ist holomorph isomorph zum Produktbündel $X \times E$.*

Beweis. Wir werden zuerst 2. aus 1. folgern. Sei also $g = \{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ ein zu $\mathcal{E}$ assoziierter $\mathcal{O}^{GL(E)}$-Kozyklus. Seien $\{(\Theta_i, U_i)\}_{i \in I}$ die entsprechenden Karten von $\mathcal{E}$, dann gilt

$$\left(z, g_{ij}(h)\right) = \Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,h) \tag{2.4}$$

für alle $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$. Nach Voraussetzung 1. ist g trivial. Folglich gibt es holomorphe Abbildungen $f_i : U_i \to GL(E)$, $i \in I$, mit der Eigenschaft

$$g_{ij}(z) = f_i^{-1}(z) \circ f_j(z), \tag{2.5}$$

für alle $z \in U_i \cap U_j$.

Wir definieren nun holomorphe Isomorphismen $F_i : U_i \times E \to U_i \times E$ durch die Gleichung

$$F_i(z,h) = (z, f_i(z)(h))$$

für $z \in U_i$ und $h \in E$. Dann gilt für jedes $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$ die Gleichung

$$\left(F_i^{-1} \circ F_j\right)(z,h) = F_i^{-1}\left(z, f_j(z)h\right) = \left(z, f_i^{-1}(z) f_j(z) h\right).$$

Zusammen mit den Gleichungen (2.4) und (2.5) folgt daraus

$$\left(F_i^{-1} \circ F_j\right)(z,h) = (z, g_{ij}(z)h) = \left(\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}\right)(z,h)$$

für alle $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$. Also gilt

$$\Theta_i \circ f_i = \Theta_j \circ f_j$$

auf $\mathcal{E}\big|_{U_i \cap U_j}$. Dann können wir einen holomorphen Isomorphismus $\Gamma : \mathcal{E} \to X \times E$ durch die Gleichung

$$\Gamma = \Theta_i \circ f_i$$

auf $\mathcal{E}\big|_{U_i}$ definieren. Also gilt die Aussage 2.

Wir wollen nun Aussage 1 aus 2. folgern. Sei also $\Gamma : \mathcal{E} \to X \times E$ ein holomorpher Isomorphismus. Sei $(\Theta_i, U_i)_{i \in I}$ ein Atlas von $\mathcal{E}$ zu dem g gehört. Wir definieren holomorphe Isomorphismen $F_i : U_i \times E \to U_i \times E$ durch die Gleichung

$$F_i := \Gamma \circ \Theta_i^{-1}.$$

Folglich gilt auf $\mathcal{E}\big|_{U_i \cap U_j}$ die Gleichung

$$\Theta_i \circ F_i = \Theta_j \circ F_j.$$

Daraus folgt

$$\left(F_i^{-1} \circ F_j\right)(z,h) = \left(\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}\right)(z,h) \tag{2.6}$$

für alle $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$.
Wir definieren holomorphe Abbildungen $f_i : U_i \to GL(E)$ durch die Gleichung

$$F_i(z,h) = (z, f_i(z)(h))$$

für $z \in U_i$ und $h \in E$. Dann gilt

$$\left(F_i^{-1} \circ F_j\right)(z,h) = F_i^{-1}\left(z, f_j(z)h\right) = \left(z, f_i^{-1}(z) f_j(z) h\right) \tag{2.7}$$

für $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$. Da g der zu $(\Theta_i, U_i)_{i \in I}$ gehörende Kozyklus ist, gilt

$$(z, g_{ij}(h)) = \Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,h)$$

für $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in E$. Zusammen mit den Gleichungen (2.6) und (2.7) folgt daraus Gleichung (2.5). Also gilt Aussage 1. □

2.2 Hochheben von Schnitten

Ziel dieses Abschnitts ist es die Sätze 2.21 und 2.27 zu beweisen. Diese werden später beim Beweis des Satzes 2.31, in Abschnitt 2.3, eine entscheidende Rolle spielen. Wir folgen hier einer Beweisidee, wie sie z. B. in [L3] nachzulesen ist. Für die Definitionen von $\mathfrak{Ker}_\Phi$ und $\mathfrak{Im}_\Phi$ sei auf den Anhang, Definition 4.14, verwiesen.

Definition 2.19. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X und sei $U \subseteq X$ offen und relativ kompakt in X. Mit $M = M\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U)$ bezeichnen wir den Raum aller beschränkten holomorphen Schnitte von $\mathcal{E}$ auf U. Wir definieren einen Homomorphismus Φ von $U \times M$ nach $\mathcal{E}$ für $f \in M$ und $z \in U$ durch die Formel*

$$\Phi(z)(z,f) = f(z).$$

Des Weiteren definieren wir einen zweiten Homomorphismus Ψ von $U \times M$ in sich selbst indem wir

$$(\Psi(z)(z,f))(v) := (z, (v-z)f(v))$$

für $f \in M$ und $v, z \in U$ setzen.

Definition 2.20. *Seien $U \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. Sei $f \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U)$ ein holomorpher Schnitt von $\mathcal{E}$ über U. Dann setzen wir*

$$\|f\|_U := \sup_{a \in U} \|f(a)\|_{\mathcal{E}}.$$

Satz 2.21. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X, auf dem eine Norm $\|\cdot\|$ ausgezeichnet ist. Sei zudem $Y \subseteq X$ eine offene und relativ kompakte Menge in X, $M = M(Y)$ der in Definition 2.19 definierte Raum und sei $\|f\| = \|f\|_Y$ für $f \in M$. Seien zudem $\Phi : Y \times M \to \mathcal{E}\big|_Y$ und $\Psi : Y \times M \to Y \times M$ die in Definition 2.19 eingeführten Homomorphismen. Dann gilt für $z \in Y$:*

1. $\inf_{f \in M, \|f\|=1} \|\Psi(z) f\| > 0$.
2. $Im\Psi(z) = Ker\Phi(z)$.
3. *Für jede offene Menge $V \subseteq Y$ und jeden Schnitt $f \in \mathfrak{Ker}_\Phi(V)$ ist der Schnitt $\tilde{f} : V \to V \times M$ mit $\Psi(\cdot)\tilde{f} = (\cdot, f(\cdot))$ auf V holomorph.*
4. $\Phi\mathcal{O}(V, M) = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(V)$ *für jede offene Menge $V \subseteq Y$.*

Der Beweis von Satz 2.21 besteht aus drei Sätzen, welche wir jetzt einzeln angehen werden. Bevor wir dies tun können müssen wir noch das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2.22. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ holomorphe Banachraum-Bündel über X, auf denen Normen ausgezeichnet sind. Angenommen, $T : X \to Hom(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ ist ein holomorpher Schnitt, so dass*

$$\inf_{x \in \mathcal{E}_1|_z, \|x\|_{\mathcal{E}_1}=1} \|T(z)x\| > 0 \tag{2.8}$$

für jedes $z \in X$ gilt.
Dann ist für jeden holomorphen Schnitt $f_2 : X \to \mathcal{E}_2$ mit $f(z) \in ImT(z)$ für jedes $z \in X$ der eindeutige Schnitt $f_1 : X \to \mathcal{E}_1$ mit $Tf_1 = f_2$ auf X holomorph.

Beweis. Da Holomorphie nur eine lokale Eigenschaft ist und jedes holomorphe Banachraum-Bündel lokal trivial ist, genügt es den Fall, in dem $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ triviale Bündel sind, d.h. $\mathcal{E}_1 = X \times B_1$ und $\mathcal{E}_2 = X \times B_2$, zu betrachten. Wir können nun die Schnitte f_1, f_2 und T als Funktionen mit Werten in B_1, B_2 und $L(B_1, B_2)$ auffassen. Sei nun ein Punkt $z \in X$ gegeben und sei

$$x_h := \frac{f_1(z+h) - f_1(z)}{h}$$

für hinreichend kleine $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \to \infty} x_h$$

existiert. Aufgrund der Gleichung $Tf_1 = f_2$ gilt

$$\frac{f_2(z+h) - f_2(z)}{h} = T(z+h)x_h + \frac{T(z+h) - T(z)}{h} f_1(z).$$

Da f_2 und T als holomorph vorausgesetzt wurden, folgt daraus die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \to \infty} T(z+h)x_h. \tag{2.9}$$

Nach Voraussetzung (2.8) sowie der Stetigkeit von T folgt die Existenz einer Zahl $r > 0$, so dass

$$c := \inf_{x \in B_1, \|x\|_{B_1}=1, h \in \mathbb{C}, 0<|h|\leq r} \|T(z+h)x\| > 0 \tag{2.10}$$

gilt. Daraus folgt, zusammen mit der Existenz des Grenzwertes (2.9), dass die Familie $\{x_h\}_{0<|h|\leq r}$, nach eventueller Verkleinerung von r, beschränkt ist. Aus der Gleichung

$$T(z+h)x_h = T(z)x_h + (T(z+h) - T(z))x_h$$

folgt wegen der Existenz von (2.9), der Beschränktheit von $\{x_h\}_{0<|h|\leq r}$ und der Gleichung

$$\lim_{h\to\infty} (T(z+h) - T(z)) = 0,$$

dass auch der Grenzwert

$$y := \lim_{h\to 0} T(z)x_h$$

existiert. Da nach Voraussetzung (2.8) das Bild von $T(z)$ abgeschlossen ist, liegt y im Bild von $T(z)$. Folglich gibt es einen Punkt $x \in X$ mit der Eigenschaft $y = T(z)x$. Aus der Existenz von y und der Ungleichung (2.10) folgt nun

$$\lim_{h\to\infty} \|x_h - x\| \leq \lim_{h\to\infty} \frac{1}{c}\|T(z)x_h - T(z)x\| = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{c}\|T(z)x_h - y\| = 0.$$

Also gilt $\lim_{h\to 0} x_h = x$. □

Wir kommen nun zu den drei Sätzen, welche zusammen den Beweis von Satz 2.21 bilden.

Satz 2.23. *Die Aussagen von Satz 2.21 gelten, wenn man zusätzlich annimmt, dass es einen Banachraum B und einen holomorphen Homomorphismus $T : Y \times B \to \mathcal{E}\big|_Y$ gibt, so dass $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y = \mathfrak{Im}_T$ gilt.*

Beweis. Aus der Definition der Homomorphismen Φ und Ψ folgt sofort die Inklusion $\mathrm{Im}\Psi(z) \subseteq \mathrm{Ker}\Phi(z)$. Sei nun $(z, f) \in \mathrm{Ker}\Phi(z)$. Dann ist der Schnitt $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $\zeta \in Y$ holomorph und beschränkt und folglich gilt $g \in M$. Wegen

$$(\Psi(z)(z,g))\,(\zeta) = (z, (\zeta - z)g(\zeta)) = (z, f(\zeta))$$

gilt $(z, f) = \Psi(z)(z, g) \in \mathrm{Im}\Psi(z)$. Also gilt Aussage 2.
Sei $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$ der zu der Norm $\|\cdot\|$ gehörende Atlas von X und sei $\{\chi_i\}_{i\in I}$ die entsprechende C^∞-Zerlegung der Eins. Sei zudem $z \in Y$ fixiert und $j \in I$, so dass $z \in U_j$ gilt.
Dann können wir $\epsilon > 0$ so wählen, dass die Menge $\{\zeta : |\zeta - z| \leq \epsilon\}$ eine Teilmenge von $Y \cap U_j$ ist. Sei nun $f \in M\mathcal{O}^{\mathcal{E}}(Y)$ mit $\|f\|_Y = 1$.

Wegen Definition 2.20 gibt es einen Punkt $\xi \in Y$ mit $\xi \neq z$ und der Eigenschaft $\|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} \geq \frac{1}{2}$.
Angenommen, es gilt $\xi \in Y \setminus \{\zeta : |\zeta - z| < \epsilon\}$. Dann folgt

$$\sup_{\zeta \in Y} \|(\zeta - z)f(\zeta)\|_{\mathcal{E}} \geq \|(\xi - z)f(\xi)\|_{\mathcal{E}} \geq \epsilon \|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} \geq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Nehmen wir nun an, dass $\xi \in \{\zeta : |\zeta - z| < \epsilon\}$ gilt. Da f ein Schnitt von $\mathcal{E}$ ist, gilt $f(\xi) \in \mathcal{E}_{\xi}$. Daraus folgt nach Definition 2.11 die Gleichung

$$\|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} = \sum_{i \in I} \chi_i(\xi) \|f(\xi)\|_i. \tag{2.12}$$

Da die Menge $\{\mathrm{supp}\chi_i\}_{i \in I}$ lokal endlich ist, folgt daraus, dass nur endlich viele Funktionen χ_i am Punkt ξ nicht verschwinden. Es gibt also eine Zahl $N < \infty$ und Indizes $i_1, \ldots, i_N$, so dass die Gleichung (2.12) die Form

$$\|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} = \sum_{v=1}^{N} \chi_{i_v}(\xi) \|f(\xi)\|_{i_v} \tag{2.13}$$

annimmt. Sei $k \in \{1, \ldots, N\}$ die Zahl, für die $\chi_{i_k}(\xi)\|f(\xi)\|_{i_k} \geq \chi_{i_v}(\xi)\|f(\xi)\|_{i_v}$ für alle $v \in \{1, \ldots, N\}$ gilt. Dann gilt wegen (2.13) die Abschätzung

$$\|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} \leq N \chi_{i_k}(\xi) \|f(\xi)\|_{i_k} \leq N \|f(\xi)\|_{i_k}.$$

Zusammen mit der Ungleichung $\|f(\xi)\|_{\mathcal{E}} \geq \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\|f(\xi)\|_{i_k} \geq \frac{1}{2N}. \tag{2.14}$$

Wir wählen nun ein $\epsilon' > 0$ so, dass die Menge $\{\zeta : |\zeta - \xi| \leq \epsilon'\}$ eine Teilmenge von $U_{i_k} \cap \{\zeta : |\zeta - z| < \epsilon\}$ ist und dass χ_{i_k} auf ganz $\{\zeta : |\xi - \zeta| \leq \epsilon'\}$ ungleich Null ist. Nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen existiert ein Punkt $\xi' : |\xi' - z| = \epsilon'$ mit der Eigenschaft

$$\|f(\xi')\|_{i_k} = \max_{\zeta' \in \{\zeta : |\zeta - z| \leq \epsilon'\}} \|f(\zeta')\| \geq \|f(\xi)\|_k \geq \frac{1}{2N}.$$

Sei nun ein solches ξ' fixiert. Dann gilt wegen (2.14) die Abschätzung

$$\|f(\xi')\|_{\mathcal{E}} = \sum_{i \in I} \chi_i(\xi') \|f(\xi')\|_i \geq \chi_{i_k}(\xi') \|f(\xi')\|_{i_k} \geq \frac{\chi_k(\xi')}{2N} =: C$$

und wegen der Wahl von ϵ' ist $C > 0$. Daraus folgt

$$\|(\xi' - z)f(\xi')\|_{\mathcal{E}} = |\xi' - z| \|f(\xi')\|_{\mathcal{E}} \geq \epsilon' C.$$

Wir setzen nun $\gamma := \min\{\frac{\epsilon}{2}, \epsilon' C\}$ und erhalten nach Definition 2.20 die Ungleichung

$$\|\Psi(z)f\| = \sup_{\zeta \in Y} \|(\Psi(z)f)(\zeta)\|_{\mathcal{E}} = \sup_{\zeta \in Y} \|(\zeta - z)f(\zeta)\|_{\mathcal{E}} \geq \gamma.$$

Also gilt Aussage 1.
Die Aussage 3 folgt aus den Aussagen 1 und 2 zusammen mit dem Lemma 2.22.
Sei nun $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(V)$. Da wir $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y = \mathfrak{Im}_T$ vorausgesetzt haben, gibt es für jeden Punkt $z \in V$ einen holomorphen $(Y \times B)$-wertigen Schnitt g_z auf einer Umgebung $V_z \subseteq V$ von z, so dass $f = Tg_z$ in V_z gilt. Sei $\tilde{g}_z : V_z \to B$ die holomorphe Funktion, mit $g_z(\zeta) = (\zeta, \tilde{g}_z(\zeta))$. Diese kann nun in eine Taylor-Reihe

$$\tilde{g}_z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - z)^n \tilde{g}_n, \tag{2.15}$$

für $\tilde{g}_n \in B$ entwickelt werden. Nach eventuellem Verkleinern von V_z zu einer Kreisscheibe K_z mit dem Radius r, können wir annehmen, dass $\tilde{g}_z$ in K_z absolut konvergiert. Da Y relativ kompakt in X ist, gehören die Schnitte

$$\tilde{v}_n(\zeta) := T(\zeta)(\zeta, \tilde{g}_n), \tag{2.16}$$

für $\zeta \in Y$ zu M und es gilt wegen (2.3) die Abschätzung

$$\|\tilde{v}_n\|_M \leq C\|\tilde{g}_n\|_B, \tag{2.17}$$

wobei $C := \sup_{\zeta \in Y} \|T(\zeta)\| < \infty$ konstant ist. Da die Reihe (2.15) in K_z absolut konvergiert und die Ungleichung (2.17) gilt, konvergiert auch die Potenzreihe

$$\tilde{v}_z(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - z)^n \tilde{v}_n \tag{2.18}$$

in K_z absolut. Nach eventuellem Verkleinern von K_z ist $\tilde{v}_z$ beschränkt und holomorph. Sei $v_z \in \mathcal{O}^{X \times M}(K_z)$ der Schnitt mit $v_z(\zeta) := (\zeta, \tilde{v}_z(\zeta))$. Nach der Definition von Φ gilt, für $\zeta \in V_z$, die Gleochung

$$\Phi(\zeta)v_z(\zeta) = (\tilde{v}_z(\zeta))(\zeta).$$

Wegen (2.15), (2.16) und (2.18) gilt für $\zeta \in V_z$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta)v_z(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta - z)^n \tilde{v}_n(\zeta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta - z)^n T(z)(\zeta, \tilde{g}_n) \\
&= T(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta - z)^n(\zeta, \tilde{g}_n)\right) \\
&= T(\zeta)\left(\zeta, \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta - z)^n \tilde{g}_n\right) \\
&= T(\zeta)(\zeta, \tilde{g}_z(\zeta)) \\
&= T(\zeta)g_z(\zeta) \\
&= f(\zeta).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$v_z(\zeta) - v_y(\zeta) \in \ker \Phi(\zeta)$$

für jedes $\zeta \in V_z \cap V_y$ gilt. Nach Aussage 3 gibt es einen eindeutigen Schnitt $h_{zy} \in \mathcal{O}^{X \times M}\left(V_z \cap V_y\right)$, für den

$$v_z - v_y = \Psi h_{zy}$$

auf $V_z \cap V_y$ gilt. In $V_z \cap V_y \cap Y_x$ gilt folglich die Aussage

$$\Psi h_{zy} + \Psi h_{yx} = v_z - v_y + v_y - v_x = v_z - v_x = \Psi h_{zx}.$$

Zusammen mit der Injektivität von Ψ folgt daraus, dass dort auch $h_{zy} + h_{yx} = h_{zx}$ gilt. Da additive, holomorphe Cousin-Probleme lösbar sind (siehe z. B. [GL] S.44), können wir Schnitte $h_z \in \mathcal{O}^{X \times M}(V_z)$ finden, für die

$$h_{zy} = h_z - h_y$$

in $V_z \cap V_y$ gilt. Daraus folgt, dass auf $V_z \cap V_y$ die Gleichung

$$v_z - \Psi h_z = v_y - \Psi h_y$$

gilt. Dann können wir durch $v := v_z - \Psi h_z$ in V_z einen Schnitt $v \in \mathcal{O}^M(V)$ definieren, für den $f = \Psi v$ gilt. Dies beweist Aussage 4. □

Definition 2.24. *Für jede Menge $\mathcal{J}$ bezeichnen wir mit $l_1(\mathcal{J})$ den Banachraum aller Funktionen $\alpha : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ für die*

$$\|\alpha\|_{l_1(\mathcal{J})} := \sum_{i \in \mathcal{J}} |\alpha(i)| < \infty$$

gilt.

Satz 2.25. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X. Angenommen, es gibt einen Banachraum B sowie einen holomorphen Schnitt $T : Y \to Hom(Y \times B, \mathcal{E})$, so dass $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y = \mathfrak{Im}_T$ gilt. Dann gibt es für jede offene, in X relativ kompakte Menge Y, eine Menge $\mathcal{J}$ und einen holomorphen Schnitt $\Pi : Y \to Hom(Y \times l_1(\mathcal{J}), \mathcal{E}|_Y)$, welcher die Gleichung*

$$\Pi\mathcal{O}^{Y\times l_1(\mathcal{J})}(V) = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(V)$$

für alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ erfüllt.

Beweis. Sei auf $\mathcal{E}$ die Norm $\|\cdot\|$ fixiert. Sei der Raum $M = M(Y)$ wie in der Definition 2.19 gegeben und $\mathcal{J}$ die Menge aller Schnitte $h \in M(Y)$ mit

$$\|h\|_{M(Y)} = \sup_{z\in Y} \|h(z)\| \leq 1. \tag{2.19}$$

Für jedes fixierte $z \in Y$ definieren wir für $x \in l_1(\mathcal{J})$ durch

$$\Pi(z,x) := \sum_{f\in\mathcal{J}} x(f)f(z) \tag{2.20}$$

einen stetigen, linearen Operator $\Pi(z,\cdot)$ von $l_1(\mathcal{J})$ in $\mathcal{E}_z$, für den wegen (2.19) die Ungleichung $\|\Pi(z)\| \leq 1$ gilt.
Betrachten wir nun

$$\sum_{f\in\mathcal{J}} \sup_{z\in Y} \|x(f)f(z)\|_{\mathcal{E}} \leq \sum_{f\in\mathcal{J}} \sup_{z\in Y} |x(f)|\|f(z)\|_{\mathcal{E}} \leq \sum_{f\in\mathcal{J}} |x(f)| = \|x\| < \infty.$$

Daraus folgt, dass $\Pi(\cdot,x)$ auf Y gleichmäßig konvergiert. Also ist $\Pi(\cdot,x)$ für alle $x \in l_1(\mathcal{J})$ holomorph und nach [GL], Theorem 1.7.1, ist der so definierte Schnitt $\Pi : Y \to Hom(Y \times M, \mathcal{E})$ holomorph. Sei nun $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(V)$. Nach Satz 2.23 gibt es holomorphe Schnitte $\Phi : Y \to Hom(Y \times M, \mathcal{E})$, $g : V \to Y \times M$, so dass $f = \Phi g$ gilt. Sei $\tilde{g}$ die Funktion, mit der $g(\zeta) = (\zeta, \tilde{g}(\zeta))$ für $\zeta \in V$ gilt. Diese kann nun dargestellt werden als

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \tilde{g}_n, \tag{2.21}$$

wobei $\varphi_n \in \mathcal{O}(V)$, $\tilde{g}_n \in M$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{z\in K} |\varphi_n(z)| \|\tilde{g}_n\|_M < \infty \tag{2.22}$$

für jede kompakte Menge $K \subseteq V$ gilt, siehe dazu [B]. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\|\tilde{g}_n\|_M = 1$ gilt.

Dann nimmt die Gleichung (2.22) die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{z\in K} |\varphi_n(z)| < \infty \tag{2.23}$$

an. Sei nun g_n der konstante Schnitt mit dem Wert $\tilde{g}_n$. Dann gilt für $\zeta \in Y$ die Gleichung

$$\Phi(\zeta)g_n(\zeta) = \tilde{g}_n(\zeta). \tag{2.24}$$

Nun können wir Funktionen $\tilde{\alpha}_n \in l_1(\mathcal{J})$ wie folgt definieren:

$$\tilde{\alpha}_n(\tilde{f}) := \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad \tilde{f} = \tilde{g}_n \\ .0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.25}$$

Dann gilt

$$\|\tilde{\alpha}_n\|_{l_1(\mathcal{J})} = 1. \tag{2.26}$$

Zusammen mit (2.23) folgt daraus, dass für jede kompakte Menge $K \subseteq V$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{z\in K} \|\varphi_n(z)\tilde{\alpha}_n\| < \infty$$

gilt. Daraus folgt, dass die Summe

$$\tilde{\beta}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\tilde{\alpha}_n$$

für alle $z \in V$ konvergiert. Betrachten wir nun die Partialsummen von $\tilde{\beta}$, so erhalten wir für $N > M$ wegen (2.26) die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} \max_{z\in K} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(z)\tilde{\alpha}_n - \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(z)\tilde{\alpha}_m \right\| &= \max_{z\in K} \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \varphi_n(z)\tilde{\alpha}_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=M+1}^{N} \max_{z\in K} |\varphi_n(z)| \|\tilde{\alpha}_n\| \\ &\leq \sum_{n=M+1}^{N} \max_{z\in K} |\varphi_n(z)|. \end{aligned}$$

Folglich konvergieren wegen (2.23) die Differenzen der Partialsummen von $\tilde{\beta}$ für $M \to \infty$ gegen Null. Also konvergiert $\tilde{\beta}$ bzgl. z gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subseteq V$ und ist folglich holomorph in V. Sei β der konstante Schnitt mit dem Wert $\tilde{\beta}$.

Dann folgt zusammen mit (2.20), (2.21), (2.24) und (2.25) sowie der Linearität von Φ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\Pi\beta &= \Pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\tilde{\alpha}_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\Pi\tilde{\alpha}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sum_{\tilde{f}\in\mathcal{J}}\tilde{\alpha}_n(\tilde{f})\tilde{f} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\tilde{g}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\Phi g_n \\
&= \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n g_n\right) \\
&= \Phi g \\
&= f.
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

Satz 2.26. *Seien X_1 und X_2 offene Mengen in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X = X_1 \cup X_2$. Angenommen, es gibt zwei Banachräume B_1 und B_2 sowie holomorphe Schnitte $T_1 : X_1 \to Hom(X_1 \times B_1, \mathcal{E})$ und $T_2 : X_2 \to Hom(X_2 \times B_2, \mathcal{E})$ mit der Eigenschaft*

$$\mathfrak{Im}_{T_j} = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_{X_j}$$

für $j = 1,2$. Dann gibt es für jede in X relativ kompakte, offene Menge Y einen Banachraum B und einen holomorphen Schnitt $T : Y \to Hom(Y \times B, \mathcal{E})$, mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{Im}_T = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y.$$

Beweis. Sei Y eine relativ kompakte, offene Teilmenge von X. Seien $Y_1' \subseteq X_1$ und $Y_2' \subseteq X_2$ zwei offene, in X_1 bzw. X_2 relativ kompakte Mengen, die so gewählt sind, dass $Y_j := Y \cap X_j$ für $j \in \{1,2\}$ relativ kompakt in Y_j' ist, und sei zudem $Y' = Y_1' \cup Y_2'$.

Dann gibt es nach Anwenden von Satz 2.25 auf (X_1, B_1, T_1) und (X_2, B_2, T_2) zwei Mengen $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ sowie zwei holomorphe Schnitte
$\Pi_1 : Y_1' \to Hom(Y_1' \times l_1(\mathcal{J}_1), \mathcal{E})$ und $\Pi_2 : Y_2' \to Hom(Y_2' \times l_1(\mathcal{J}_2), \mathcal{E})$, so dass für $j \in \{1, 2\}$ die Gleichung

$$\Pi_j \mathcal{O}^{Y_j' \times l_1(\mathcal{J}_j)}(Y'') = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(Y'') \tag{2.27}$$

für jede offene Menge $Y'' \subseteq Y_j'$ gilt. Für jedes $i \in \mathcal{J}_1$ bezeichnen wir mit e_i die Funktion aus $l_1(\mathcal{J}_1)$ mit $e_i(i) = 1$ und $e_i(k) = 0$ für $i \neq k$.
Wegen (2.27) induziert der Schnitt Π_2 einen Epimorphismus

$$\Pi_2 : \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\left(Y_{12}'\right) \to \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\left(Y_{12}'\right),$$

wobei $Y_{12}' = Y_1' \cap Y_2'$ gilt. Nach dem Satz von der offenen Abbildung für Fréchet-Räume, siehe [Ru] Theorem 2.11, können wir eine kompakte Menge $K \subseteq Y_{12}'$, eine Konstante $C < \infty$ und Schnitte $f_i \in \mathcal{O}^{Y_2 \times l_1(\mathcal{J}_2)}\left(Y_{12}'\right)$ finden, so dass

$$\Pi_2 f_i = \Pi_1(\cdot, e_i) \tag{2.28}$$

auf Y_{12}' und die Ungleichung

$$\sup_{z \in Y_{12}} \|f_i(z)\| \leq C \max_{z \in K} \|\Pi_1(z) e_i\| \leq C \max_{z \in K} \|\Pi_1(z)\| < \infty \tag{2.29}$$

gilt, wobei $Y_{12} = Y_1 \cap Y_2$ ist. Daraus folgt, dass wir für jedes $z \in Y_{12}$ durch

$$V(z)\alpha := \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \alpha(i) f_i(z), \tag{2.30}$$

für $\alpha \in l_1\left(\mathcal{J}_1\right)$, einen linearen Operator von $l_1\left(\mathcal{J}_1\right)$ nach $l_1\left(\mathcal{J}_2\right)$ definieren können, wobei

$$\|V(z)\| \leq C \max_{\zeta \in K} \|\Pi_1(\zeta)\| \tag{2.31}$$

gilt. Weiter folgt aus (2.29), dass

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_1} \sup_{z \in Y_{12}} \|\alpha(i) f_i(z)\| \leq C \max_{z \in K} \|\Pi_1(z)\| \|\alpha\|_{l_i(\mathcal{J}_1)} < \infty$$

für jedes $\alpha \in l_i\left(\mathcal{J}_i\right)$ gilt. Folglich ist der für jedes $\alpha \in l_i\left(\mathcal{J}_i\right)$ definierte Schnitt $V\alpha$ holomorph auf Y_{12}. Nach [GL], Theorem 1.7.1, ist deswegen der auf diese Weise definierte Schnitt $V : Y_{12} \to Hom\left(Y_1 \times l_1\left(\mathcal{J}_1\right), Y_2 \times l_1\left(\mathcal{J}_2\right)\right)$ ebenfalls holomorph. Wegen (2.28) folgt daraus, dass

$$\Pi_2 V = \Pi_1 \tag{2.32}$$

in Y_{12} gilt.

Auf dieselbe Art und Weise lässt sich ein Schnitt
$W : Y_{12} \to Hom\left(Y_2 \times l_1\left(\mathcal{J}_2\right), Y_1 \times l_1\left(\mathcal{J}_1\right)\right)$ konstruieren, für den

$$\Pi_2 = \Pi_1 W \tag{2.33}$$

in Y_{12} gilt. Wir bezeichnen nun mit I_j, für $j \in \{1,2\}$, den Einheitsoperator in $l_1(\mathcal{J}_j)$. Des Weiteren setzen wir $B := l_1(\mathcal{J}_1) \oplus l_1(\mathcal{J}_2)$. Seien $\tilde{V}$ und $\tilde{W}$ die zwei durch V bzw. W induzierten Operatorfunktionen. Dann definieren wir durch die folgende Blockmatrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ \tilde{V} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -\tilde{W} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

eine holomorphe Funktion $\mathcal{M} : Y_{12} \to GL(B)$. Dann liegen die Werte von $\mathcal{M}$ in der Zusammenhangskomponente von $GL(B)$, in der auch der Einheitsoperator liegt. Folglich können wir zwei holomorphe Funktionen $\mathcal{M}_j : Y_j \to GL(B)$ mit $j = 1, 2$ finden, so dass

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^{-1}$$

in Y_{12} gilt, siehe z.B. [GL], Theorem 0.0.1 oder [Bu]. Zusammen mit (2.32) und (2.33) folgt daraus

$$(0 \oplus \Pi_2)\mathcal{M}_2 = (\Pi_1 \oplus 0)\mathcal{M}_1$$

in Y_{12}. Die beiden Seiten dieser Gleichung definieren nun zusammen einen holomorphen Schnitt $T : Y \to Hom(Y \times B, \mathcal{E})$. Da die Werte von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ invertierbar sind und $\mathfrak{Im}_{\Pi_j}\big|_{Y_j} = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_{Y_j}$ gilt, folgt die Gleichung

$$\mathfrak{Im}_T\big|_Y = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y$$

und der Satz ist bewiesen. □

Beweis von Satz 2.21. Sei $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas von $\mathcal{E}$. Da $\overline{Y} \subseteq X$ kompakt ist, gibt es eine endliche Index-Menge $J \subseteq I$ mit $\overline{Y} \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \subseteq X$. Wir definieren holomorphe Schnitte $T_j : U_j \to Hom\left(U_j \times E(j), \mathcal{E}\right)$, $j \in J$, wobei $E(j)$ der zu j gehörende Banachraum ist, indem wir $T_j(z) := \Theta_j^{-1}$ für $z \in U_j$ setzen, so dass

$$\mathfrak{Im}_{T_j} = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_{U_j}$$

gilt. Sei $W := \bigcup_j U_j$. Dann erhalten wir durch wiederholtes Anwenden von Satz 2.26 ein triviales Banachraum-Bündel $X \times B$ und einen holomorphen Schnitt
$T : W \to Hom\left(Y \times B, \mathcal{E}\right)$, mit der Eigenschft

$$\mathfrak{Im}_T\big|_Y = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y.$$

Nach Satz 2.23 ist damit der Satz 2.21 bewiesen. □

Mit Hilfe des soeben gezeigten Satzes 2.21 werden wir nun den folgenden Approximationssatz beweisen.

Satz 2.27. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X. Zudem sei $K \subseteq X$ kompakt und einfach zusammenhängend bezüglich X und $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von K. Dann gibt es für jeden Schnitt $f \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U)$ und jedes $\epsilon > 0$ einen Schnitt $\tilde{f} \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$, mit*

$$\max_{z \in K} \|\tilde{f}(z) - f(z)\|_{\mathcal{E}} < \epsilon.$$

Beweis. Wir wählen eine Folge von Kompakta $K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq X$, welche einfach zusammenhängend bezüglich X sind, so dass jede kompakte Teilmenge von X in einer der Mengen K_n enthalten ist. Sei $K_0 = \overline{U}$, $f_0 = f$ und sei $U_0 = U$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass U_0 relativ kompakt in X ist. Wir wählen eine in X relativ kompakte Umgebung $U_1 \subseteq X$ von K_1, mit $U_0 \subseteq U_1$. Nach Satz 2.21 gibt es den Banachraum M und einen holomorphen Homomorphismus $\Phi : U_1 \times M \to \mathcal{E}\big|_{U_1}$, so dass $\Phi\mathcal{O}^M(V) = \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(V)$ für jede offene Teilmenge $V \subseteq U_1$ gilt. Insbesondere gibt es einen holomorphen Schnitt $g_0 : U_0 \to U_0 \times M$, so dass $f_0 = \Phi g_0$ in U_0 gilt. Nach dem Approximationssatz von Runge für vektorwertige Funktionen können wir einen holomorphen Schnitt $g_1 : X \to X \times M$ finden, so dass

$$\max_{z \in K_0} \|g_0(z) - g_1(z)\| < \frac{\epsilon}{2 \max_{z \in K_0} \|\Phi(z)\|}$$

gilt. Wir setzen nun $f_1 = \Phi g_1$ in U_1 und erhalten einen Schnitt $f_1 \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U_1)$ mit

$$\max_{z \in K_0} \|f_0(z) - f_1(z)\| < \epsilon 2^{-1}.$$

Wiederholen wir nun diesen Prozess für die anderen K_n, erhalten wir eine Folge von Schnitten $f_n \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U_n)$, wobei U_n eine offene Umgebung von K_n ist, so dass

$$\max_{z \in K_n} \|f_n(z) - f_{n+1}(z)\| < \epsilon 2^{-n-1}$$

gilt. Demnach können wir $\tilde{f} := \lim_{n\to\infty} f_n$ setzen und erhalten einen Schnitt $\tilde{f} \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$, welcher die geforderte Eigenschaft besitzt. □

2.3 Holomorphe Kozyklen mit Werten in Banachraum-Bündeln

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit den Zerfallseigenschaften von Kozyklen mit Werten in holomorphen Banachraum-Bündeln beschäftigen. Dazu werden wir zuerst stetige Kozyklen betrachten und aus dem für diese erzielten Resultat, dem Satz 2.28, das entsprechende Gegenstück, Satz 2.31, für holomorphe Kozyklen folgern.

Satz 2.28. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Des Weiteren sei $(C^\infty)^{\mathcal{E}}$ die Garbe aller C^∞-Schnitte von $\mathcal{E}$. Dann gilt für $r \geq 1$ die Gleichung $H^r\left(\mathcal{U}, (C^\infty)^{\mathcal{E}}\right) = 0$.*

Für die Definition von $H^r\left(\mathcal{U}, (C^\infty)^{\mathcal{E}}\right)$ siehe Definition 4.19.

Beweis. Wir wählen eine C^∞-Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\mathcal{U}$. Das heißt, wir wählen eine lokal endliche Familie von C^∞-Funktionen $\chi_j : X \to [0,1]$, $j \in J$ mit den Eigenschaften $\operatorname{supp} \chi_j \subseteq U_j$ und $\sum_{j \in J} \chi_j = 1$.
Sei nun ein Kozyklus $f \in \mathcal{Z}^r(\mathcal{U}, (C^\infty)^{\mathcal{E}})$ gegeben. Wir suchen eine Kokette $u \in C^{r-1}(\mathcal{U}, (C^\infty)^{\mathcal{E}})$ mit $\delta u = f$.
Jeder der Schnitte $\chi_j f_{ji_0,\cdots,i_{p-1}}$ kann nach Fortsetzung durch die Null als Element von $(C^\infty)^{\mathcal{E}}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{r-1}})$ aufgefasst werden. Daraus folgt, dass man eine Kokette $u \in C^{r-1}(\mathcal{U}, (C^\infty)^{\mathcal{E}})$ durch die Gleichung

$$u_{i_0,\cdots,i_r} = \sum_{j \in J} \chi_j f_{ji_0,\cdots,i_{r-1}}$$

definieren kann. Seien nun $l_0, \cdots, l_r \in J$ beliebige Indizes. Dann gilt

$$(\delta u)_{l_0,\cdots,l_r} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} u_{l_o,\cdots\hat{k}\cdots,l_r} = \sum_{j \in J} \chi_j \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} f_{jl_o,\cdots\hat{k}\cdots,l_r}. \tag{2.34}$$

Des Weiteren gilt wegen $\delta f = 0$ für jedes $j \in J$ die Gleichung

$$0 = (\delta f)_{jl_o,\cdots,l_r} = f_{l_o,\cdots,l_r} + \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+2} f_{jl_o,\cdots\hat{k}\cdots,l_r}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} f_{jl_o,\cdots\hat{k}\cdots,l_r} = f_{l_0,\cdots,l_r}.$$

Zusammen mit (2.34) folgt daraus wegen $\sum_{j \in J} \chi_j = 1$ die Gleichung

$$(\delta u)_{l_0,\cdots,l_r} = \sum_{j \in J} \chi_j f_{l_0,\cdots,l_r} = f_{l_0,\cdots,l_r}.$$

Also ist u eine gesuchte Kokette. □

Definition 2.29. *Seien $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n$ endlich viele Garben von abelschen Gruppen über einem topologischen Raum T und seien zudem $\Phi_1, \cdots, \Phi_{n-1}$ mit $\Phi_j : \mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_{j+1}$ für $j \in [1, \cdots, n-1]$ Garben-Homomorphismen. Dann nennen wir*

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \cdots \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \mathcal{F}_n$$

eine **Sequenz** *von Garben. Wir nennen eine Sequenz von Garben* **exakt** *wenn*

$$\mathfrak{Im}_{\Phi_j} = \mathfrak{Ker}_{\Phi_{j+1}}$$

für jedes $j \in \{1, \cdots, n-2\}$ gilt, das heißt, dass für jede offene Menge $U \subseteq T$ und jeden Schnitt $f \in \mathcal{F}_{j+1}(U)$ mit $\Phi_{j+1} f = 0$ gilt:

$$\forall a \in U\ \exists V_a \subseteq U \text{ offen} \wedge \exists g \in \mathcal{F}_j(V_a) : \Phi_j g = f\big|_{V_a}.$$

Wir nennen eine Sequenz von Garben **kurz***, wenn $n = 5$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_5 = 0$ gilt.*

Für den Beweis des nächsten Satzes werden wir das folgende, wohlbekannte Lemma benutzen, wie es z. B. bei [GL] Theorem 2.3.1 nachgelesen werden kann.

Lemma 2.30. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, B ein Banachraum und $f : U \to B$ eine C^∞-Funktion. Sei zudem $\overline{\partial} : (C^\infty)^B(U) \to (C^\infty)^B(U)$ der durch die Gleichung*

$$\overline{\partial} u := \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

für $z = x + iy$ definierte Operator. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $g : U \to B$ mit $\overline{\partial} g = f$.

Satz 2.31. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Des Weiteren sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X. Dann gilt $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}) = 0$.*

Beweis. Sei $f = \{f_{ij}\} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{E}})$ ein 1-Kozyklus. Sei $Y \subseteq X$ offen und relativ kompakt in X und sei $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U} \cap Y$ mit

$$V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l = \emptyset$$

für $i, j, k, l \in I$ paarweise verschieden. Sei $\tilde{f}$ der durch f bzgl. $\mathcal{V}$ induzierte 1-Kozyklus.

Nach Satz 2.21 gibt es zwei Banachräume B_1, B_2 und eine kurze, exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}^{B_2}\big|_Y \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}^{B_1}\big|_Y \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y \to 0,$$

so dass für jede offene Menge $W \subseteq Y$ die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}^{B_2}\big|_Y(W) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}^{B_1}\big|_Y(W) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\big|_Y(W) \to 0 \tag{2.35}$$

ebenfalls exakt ist, wobei die Operatoren Φ und Ψ durch holomorphe Bündel-Isomorphismen definiert sind. Also gibt es eine 1-Kokette $g = \{g_{ij}\} \in C^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_1})$ mit $\Phi g = \tilde{f}$. Wir setzen nun $h := \delta g$ und erhalten so, wegen Lemma 4.18, einen 2-Kozyklus $h = \{h_{ijk}\}_{i,j,k \in I} \in \mathcal{Z}^2(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_1})$. Wegen der Linearität von Φ, gilt

$$\Phi h = \Phi \delta g = \delta \Phi g = \delta \tilde{f} = 0.$$

Also gilt $\delta g \in \operatorname{Ker}\Phi$ und aufgrund der Exaktheit von (2.35) gibt es eine 2-Kokette $v = \{v_{ijk}\} \in C^2(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_2})$ mit

$$\Psi v = \delta g. \tag{2.36}$$

Da für $i, j, k, l \in I$ paarweise verschieden die Gleichung $V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l = \emptyset$ gilt, folgt $v \in \mathcal{Z}^2(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_2})$. Dann gibt es nach Satz 2.28 eine 1-Kokette $w = \{w_{ij}\} \in C^1(\mathcal{V}, (C^\infty)^{B_2})$ mit

$$v = \delta w. \tag{2.37}$$

Da v holomorph ist, folgt daraus

$$\delta \bar{\partial} w = \bar{\partial} \delta w = \bar{\partial} v = 0.$$

Folglich gibt es, nach Satz 2.28, eine 0-Kokette $s \in C^0(\mathcal{V}, (C^\infty)^{B_2})$ mit

$$\bar{\partial} w = \delta s. \tag{2.38}$$

Wegen Lemma 2.30 gibt es eine 0-Kokette $r \in C^0(\mathcal{V}, (C^\infty)^{B_2})$ mit

$$s = \bar{\partial} r.$$

Wegen (2.38) folgt daraus

$$\bar{\partial} w = \delta s = \delta \bar{\partial} r. \tag{2.39}$$

Wir setzen nun $\tilde{w} := w - \delta r$ und erhalten eine 1-Kokette, die wegen Lemma 4.18 und (2.37) die Eigenschaft

$$\delta \tilde{w} = \delta w - \delta^2 r = \delta w = v \tag{2.40}$$

besitzt. Zudem folgt aus (2.39) die Gleichung

$$\bar{\partial} \tilde{w} = \bar{\partial} w - \bar{\partial} \delta r = \bar{\partial} w - \delta \bar{\partial} r = 0. \tag{2.41}$$

Also gilt $\tilde{w} \in C^1\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_2}\right)$. Wir setzen nun $\tilde{g} := g - \Psi\tilde{w}$ und erhalten wegen (2.36) und (2.40) die Gleichung

$$\delta\tilde{g} = \delta g - \delta\Psi\tilde{w} = \delta g - \Psi\delta\tilde{w} = \delta g - \Psi v = \delta g - \delta g = 0.$$

Also gilt $\tilde{g} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_1}\right)$. Dann gibt es z. B. nach Theorem 2.4.2 in [GL] eine 0-Kokette $\tilde{u} \in C^0\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{B_1}\right)$ mit $\tilde{g} = \delta\tilde{u}$. Zudem gilt wegen $\Phi\Psi = 0$ die Gleichung

$$\Phi\tilde{g} = \Phi g - \Phi\Psi\tilde{w} = \Phi g = \tilde{f}.$$

Wir setzen nun $\hat{u} := \Phi\tilde{u}$ und erhalten so eine 0-Kokette mit $\hat{u} \in C^0\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\right)$ und der Eigenschaft

$$\delta\hat{u} = \delta\Phi\tilde{u} = \Phi\delta\tilde{u} = \Phi\tilde{g} = \tilde{f}.$$

Dann gibt es nach Satz 4.9 eine 0-Kokette $u \in C^0\left(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\right)$ mit der Eigenschaft

$$\delta u = f. \tag{2.42}$$

Wir wählen nun eine ausschöpfende Folge $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von in X einfach zusammenhängenden Kompakta $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq X$ sowie offene Mengen $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $K_n \subseteq Y_n \subseteq K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wiederholen wir nun die obige Argumentation für Y_i anstelle von Y, können wir eine Folge $\left\{\left\{u_i^{(n)}\right\}_{i\in I}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ von 0-Koketten $\left\{u_i^{(n)}\right\} \in C^0\left(\mathcal{U} \cap Y_n, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\right)$ finden, welche die Eigenschaft (2.42) erfüllen. Also gilt

$$f_{ij} = u_i^{(n)} - u_j^{(n)}$$

auf $U_i \cap U_j \cap Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen induktiv eine Folge $\left\{\left\{\tilde{u}_i^{(n)}\right\}_{i\in I}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ von 0-Koketten $\left\{\tilde{u}_i^{(n)}\right\} \in C^0(\mathcal{U} \cap Y_n, \mathcal{O}^{\mathcal{E}})$ konstruieren mit den Eigenschaften

1. $\delta\tilde{u}^{(n)} = f\big|_{Y_n}$.
2. Wenn $n \geq 2$, so gilt $\left\|\tilde{u}_i^{(n)} - \tilde{u}_i^{(n-1)}\right\| < \frac{1}{2^n}$ auf $K_n \cap U_i$.

Induktionsanfang:
Wir setzen $\tilde{u}_i^{(1)} := u_i^{(1)}$ auf $Y_1 \cap U_i$.

Induktionsvoraussetzung:
Seien für ein $k \geq 1$ die 0-Koketten $\left\{\tilde{u}_i^{(1)}\right\}_{i\in I}, \cdots, \left\{\tilde{u}_i^{(k)}\right\}_{i\in I}$ mit der Eigenschaft $\left\{\tilde{u}_i^{(l)}\right\} \in C^0\left(\mathcal{U} \cap Y_l, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\right)$ für jedes $l \in \{1, \cdots, k\}$ und den Eigenschaften 1 und 2 für $n \leq k$ gegeben.
Induktionsschritt:
Da die Schnitte $\tilde{u}_i^{(k)}$ die Eigenschaft 1 haben und zudem $f_{ij} = u_i^{(k+1)} - u_j^{(k+1)}$ auf $U_i \cap U_j \cap Y_{k+1}$ gilt, folgt auf $U_i \cap U_j \cap Y_k$ die Gleichung

$$u_i^{(k+1)} - \tilde{u}_i^{(k)} = u_j^{(k+1)} - \tilde{u}_j^{(k)}.$$

Also können wir durch $h^{(k)} := u_i^{(k+1)} - \tilde{u}_i^{(k)}$ einen holomorphen Schnitt $h^{(k)} \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(Y_k)$ definieren. Da das Kompaktum K_k einfach zusammenhängend bezüglich X ist, folgt aus Satz 2.27 die Existenz eines holomorphen Schnittes $\tilde{h}^{(k)} \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$ mit der Eigenschaft

$$\left\| h^{(k)} - \tilde{h}^{(k)} \right\| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

auf K_k. Wir setzen nun $\tilde{u}_i^{(k+1)} := u_i^{(k+1)} - \tilde{h}^{(k)}$ auf $U_i \cap Y_{k+1}$. Dann gilt

$$\tilde{u}_i^{(k+1)} - \tilde{u}_j^{(k+1)} = u_i^{(k+1)} - u_j^{(k+1)} = f_{ij}$$

auf $U_i \cap U_j \cap Y_{k+1}$. Wir müssen also noch zeigen, dass für $2 \leq n \leq k+1$ die Gleichung

$$\left\| \tilde{u}_i^{(n)} - \tilde{u}_i^{(n-1)} \right\| \leq \frac{1}{2^n}$$

auf $K_n \cap U_i$ gilt. Für $2 \leq n \leq k$ gilt die Gleichung nach Induktionsvoraussetzung. Sei nun also $n = k+1$. Es gilt

$$\left\| \tilde{u}_i^{(k+1)} - \tilde{u}_i^{(k)} \right\| = \left\| u_i^{(k+1)} - \tilde{h}^{(k)} - \tilde{u}_i^{(k)} \right\| = \left\| h^{(k)} - \tilde{h}^{(k)} \right\| < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.43}$$

Damit haben wir die Folge $\left\{ \left\{ \tilde{u}_i^{(n)} \right\}_{i \in I} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert. Wegen der Gleichung (2.43) konvergiert die Folge $\left\{ \left\{ \tilde{u}_i^{(n)} \right\}_{i \in I} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von U_i. Also gibt es eine 0-Kokette $\{\tilde{u}\} \in C^0(X, \mathcal{O}^{\mathcal{E}})$ mit $\tilde{u}_i^{(n)} \to \tilde{u}_i$ auf jeder kompakten Teilmenge von U_i, für $i \in I$ und n hinreichend groß. Wegen Eigenschaft 2 gilt

$$f_{ij} = \tilde{u}_i - \tilde{u}_j$$

auf $U_i \cap U_j$. Dies beendet den Beweis. □

2.4 Rechtsinvertierbare Homomorphismen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst holomorphe Operatorfunktionen mit rechtsinvertierbaren Werten untersuchen. Wir zeigen dazu zuerst das Lemma 2.32, welches eine Aussage über die lokale, holomorphe Rechtsinvertierbarkeit solcher Operatorfunktionen macht, und das Lemma 2.34. Mit Hilfe dieser beiden Lemmata können wir dann zusammen mit dem Lemma 2.37, in dem es um eine Eigenschaft der Kerne von holomorphen Operatorfunktionen geht, den Satz 2.39 beweisen.

In diesem wird ausgesagt, dass der Kern eines Homomorphismus zwischen holomorphen Banachraum-Bündeln, den wir in diesem Abschnitt definieren werden, selbst ein holomorphes Banachraum-Bündel ist. Danach werden wir zeigen, dass holomorphe Kozyklen mit Werten in diesem Bündel zerfallen, siehe dazu Satz 2.40. Abschließend werden wir dann noch zwei Sätze über die globale, holomorphe Rechtsinvertierbarkeit, Satz 2.42 und Satz 2.43, sowie einen Approximationssatz, Satz 2.46, beweisen.

Lemma 2.32. *Seien E und F Banachräume und sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $A : X \to L(E,F)$ eine holomorphe Operatorfunktion mit rechtsinvertierbaren Werten. Dann gibt es für jedes $z \in X$ eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $z \in U$ und eine holomorphe Operatorfunktion $B : U \to L(F,E)$, so dass*

$$A \circ B = id_F$$

gilt.

Beweis. Sei $z_0 \in X$. Da $A(z_0)$ rechtsinvertierbar ist, gibt es eine holomorphe Operatorfunktion $B_0 \in L(E,F)$ mit der Eigenschaft

$$A(z_0) \circ B_0 = id_F. \tag{2.44}$$

Wir definieren eine holomorphe Operatorfunktion $M \in \mathcal{O}^{L(E,F)}(X)$ durch

$$M(z) := A(z) \circ B_0.$$

Dann gilt $M(z_0) = id_F$ und folglich gibt es eine offene Umgebung U_0 von z_0, so dass $M(z)$ invertierbar für alle $z \in U_0$ ist. Dann können wir eine Operatorfunktion $B \in \mathcal{O}^{L(F,E)}(U_0)$ definieren indem wir $B(z) := B_0 \circ M^{-1}(z)$ für $z \in U_0$ setzen. Dann gilt wegen (2.44) die Gleichung

$$A(z) \circ B(z) = A(z) \circ B_0 \circ M^{-1}(z) = id_F.$$

Also ist B die gesuchte Operatorfunktion. □

Folgerung 2.33. *Seien E und F Banachräume und sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $A : X \to L(E,F)$ eine holomorphe Operatorfunktion mit rechtsinvertierbaren Werten. Wir bezeichnen mit $\tilde{A}$ die durch A induzierte Abbildung von $\mathcal{O}^E$ nach $\mathcal{O}^F$, dann gilt*

$$\mathfrak{Im}_{\tilde{A}} = \mathcal{O}^F(X).$$

Beweis. Sei $x \in U \subseteq X$, U offen und sei $f : U \to F$ eine holomorphe Vektorfunktion. Nach Lemma 2.32 gibt es eine offene Menge $V \subseteq U$, $x \in V$ und eine holomorphe Operatorfunktion $B : V \to L(F, E)$ mit der Eigenschaft

$$A(z) \circ B(z) = id_F,$$

für $z \in V$. Wir definieren eine holomorphe Funktion $u \in \mathcal{O}^E(V)$ durch
$u(z) := B(z)[f(z)]$. Dann gilt

$$A(z)u(z) = A(z) \circ B(z)[f(z)] = f(z)$$

für $z \in V$. Also gilt $f \in ImA(V)$. Somit gilt $\mathcal{O}^F(X) \subseteq ImA$. Nach Definition gilt zudem die Inklusion $ImA \subseteq \mathcal{O}^F(X)$. Dies beendet den Beweis. □

Lemma 2.34. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei E ein Banachraum. Sei zudem $P : X \to L(E)$ eine holomorphe Operatorfunktion mit Werten in Projektoren. Dann gibt es zu jedem $z \in X$ eine offene Umgebung $U_z \subseteq X$, $z \in U_z$, und eine holomorphe Operatorfunktion $A : U_z \to GL(E)$ mit der Eigenschaft*

$$A(y)ImP(z) = ImP(y),$$

für jedes $y \in U_z$.

Beweis. Sei $z \in X$ gegeben. Wir definieren eine holomorphe Operatorfunktion $A : X \to L(E)$ durch $A(y) := I - P(z) + P(y)P(z)$ für alle $y \in X$. Dann gilt $A(z) = I$. Folglich können wir eine offene Umgebung $V_z \subseteq X$ von z finden mit $A(y) \in GL(E)$ für alle $y \in V_z$. Sei nun $x \in ImP(z)$, dann gilt

$$A(y)x = x - x + P(y)x = P(y)x \in ImP(y).$$

Also gilt $A(y)ImP(z) \subseteq ImP(y)$.
Wir wählen nun eine Umgebung von $U_z \subseteq V_z$ von z so klein , dass die Operatorfunktion $\tilde{A} : X \to L(E)$ mit $\tilde{A}(y) := I - P(y) + P(y)P(z)P(y)$ auf U_z invertierbare Werte annimmt. Sei nun $x \in ImP(y)$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es einen Vektor $w \in ImP(z)$ gibt, mit der Eigenschaft $A(y)w = x$. Da $\tilde{A}$ auf U_z invertierbare Werte annimmt, gibt es einen Vektor $v \in E$, mit $\tilde{A}(y)v = x$. Das heißt

$$x = (I - P(y))v + P(y)P(z)P(y)v.$$

Da $P(y)P(z)P(y)v \in ImP(y)$ und $x \in ImP(y)$ gelten, folgt, dass $(I - P(y))v = 0$ gilt. Daraus folgt

$$x = P(y)P(z)P(y)v.$$

Wir setzen nun $w := P(z)P(y)v$ und erhalten einen Vektor w mit der Eigenschaft

$$A(y)w = (I - P(z))w + P(y)P(z)w = P(y)w = x.$$

Also ist w der gesuchte Vektor. □

Bemerkung 2.35. *Insbesondere sind die Räume $ImP(z)$, $z \in X$, paarweise isomorph, wenn X zusammenhängend ist. Es gibt sogar für je zwei Punkte $z, z' \in X$ einen Isomorphismus $B \in GL(E)$ mit der Eigenschaft $BImP(z) = ImP(z')$.*

Folgerung 2.36. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und E ein Banachraum. Sei zudem $P : X \to L(E)$ eine holomorphe Operatorfunktion mit Werten in Projektoren und für $z^* \in X$ fixiert sei $F := ImP(z^*)$. Dann ist*

$$\mathcal{F} := \bigcup_{z \in X} \{z\} \times ImP(z)$$

zusammen mit der surjektiven Abbildung $\pi : \mathcal{F} \to X$, welche jedem Raum $\{z\} \times ImP(z)$ den Punkt z zuordnet, ein direktes holomorphes Unterbündel von $X \times E$ mit der charakteristischen Faser F. (Vergleiche hierzu Definition 2.9.)

Beweis. Sei $z_o \in X$ gegeben. Dann gibt es nach Lemma 2.34 eine offene Umgebung U_{z_0} von z_0 und eine holomorphe Operatorfunktion $A : U_{z_0} \to GL(E)$ mit der Eigenschaft

$$A(z)ImP(z) = ImP(z_0), \tag{2.45}$$

für jedes $z \in U_{z_0}$. Wegen Bemerkung 2.35 gibt es einen Isomorphismus $B \in GL(E)$ mit der Eigenschaft

$$BImP(z_0) = F. \tag{2.46}$$

Wir definieren nun eine Abbildung $\Theta : U_{z_0} \times E \to U_{z_0} \times E$, für $z \in U_{z_0}$ und $v \in E$, durch die Gleichung

$$\Theta((z, v)) = (z, BA(z)v).$$

Offensichtlich ist (U_{z_0}, Θ) eine lokale holomorphe Trivialisierung von $X \times E$. Wegen (2.45) und (2.46) gilt für alle $z \in U_{z_0}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \Theta(\mathcal{F} \cap \pi^{-1}(z)) &= \Theta(\{z\} \times ImP(z)) \\ &= \{z\} \times BA(z)ImP(z) \\ &= \{z\} \times BImP(z_0) \\ &= \{z\} \times F. \end{aligned}$$

Folglich ist die Bedingung (2.1) erfüllt. Dies beendet den Beweis. □

Lemma 2.37. *Seien E und F Banachräume und sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Seien $A : X \to L(E, F)$ und $B : X \to L(F, E)$ Operatorfunktionen mit $AB = id_F$. Dann hat die Operatorfunktion BA Werte in Projektoren und es gilt für jedes $z \in X$ die Gleichung*

$$KerA(z) = Ker[B(z) \circ A(z)].$$

Beweis. Das die Werte von BA Projektoren sind, folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned}(B(z)\circ A(z))\circ(B(z)\circ A(z)) &= B(z)\circ(A(z)\circ B(z))\circ A(z)\\ &= B(z)\circ I_F\circ A(z)\\ &= B(z)\circ A(z).\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $Ker A(z) \subseteq Ker[B(z)\circ A(z)]$. Sei nun $x \in Ker[B(z)\circ A(z)]$, dann gilt wegen der Voraussetzung $A\circ B = id_F$ die Gleichung

$$A(z)x = [A(z)\circ B(z)]\circ A(z)x = A(z)\circ[B(z)\circ A(z)x] = A(z)0 = 0.$$

Also gilt $x \in Ker A(z)$. Dies beendet den Beweis. □

Definition 2.38. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ holomorphe Banachraum-Bündel über X, sei $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ein Homomorphismus und sei $\tilde{A} : X \to Hom(\mathcal{E},\mathcal{F})$ der definierende Schnitt von A. Dann definieren wir den* **Kern** *$Ker A$ von A durch die Gleichung*

$$\bigcup_{z\in X} Ker\tilde{A}(z) =: Ker A. \tag{2.47}$$

Satz 2.39. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ holomorphe Banachraum-Bündel über X und sei $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ein holomorpher Homomorphismus, der in jeder Faser rechtsinvertierbar ist. Dann ist $Ker A$ ein direktes holomorphes Unterbündel von $\mathcal{E}$.*

Beweis. Sei $z^* \in X$ gegeben und sei E der zu z^* gehörende Banachraum bzgl. $\mathcal{E}$. Wir müssen zeigen, dass es eine lokale, holomorphe Trivialisierung (U,Θ,E) von $\mathcal{E}$, mit $z^* \in U$, sowie einen stetig projizierten Unterraum $\tilde{E}$ von E gibt, so dass

$$\Theta Ker A\big|_U = U \times \tilde{E}$$

gilt. Zunächst wählen wir beliebige lokale holomorphe Trivialisierungen

$$\Theta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}\big|_V \to V \times E$$

und

$$\Theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}\big|_V \to V \times F,$$

mit $z^* \in V$. Sei nun $\hat{A} : V \to L(E,F)$ die Operatorfunktion mit der Eigenschaft

$$\Theta_{\mathcal{F}}\circ A\circ\Theta_{\mathcal{E}}^{-1}(z,v) = \left(\hat{A}(z)v\right), \tag{2.48}$$

für jedes $z \in V$ und $v \in E$. Dann ist $\hat{A}$ holomorph mit rechtsinvertierbaren Werten. Dann gibt es nach eventueller Verkleinerung von V zu $U \subseteq V$ wegen Lemma 2.32 eine holomorphe Operatorfunktion $B : U \to L(F,E)$ mit der Eigenschaft $\hat{A}B = id_F$.

Wegen Lemma 2.37 hat die Operatorfunktion $B\hat{A}$ nur Werte in Projektoren und es gilt

$$Ker\hat{A}(z) = Ker[B(z) \circ \hat{A}(z)], \tag{2.49}$$

für jedes $z \in U$. Da $B\hat{A}$ nur Werte in Projektoren hat, hat die holomorphe Operatorfunktion $P := I - B\hat{A}$ ebenfalls nur Werte in Projektoren. Es gilt

$$Ker[B(z) \circ \hat{A}(z)] = Im[I - B(z) \circ \hat{A}(z)] = ImP(z),$$

für jedes $z \in U$. Folglich ist wegen (2.49) der Kern von $\hat{A}(z)$ für jedes $z \in U$ das Bild eines Projektors $P(z)$. Nach Folgerung 2.36 ist $\bigcup_{z\in U}\{z\} \times Ker\hat{A}(z)$ ein direktes holomorphes Unterbündel von $X \times E$. Dann gibt es nach eventueller Verkleinerung von U eine lokale, holomorphe Trivialisierung $(U, \tilde{\Theta}, \tilde{E})$ von $X \times E$, wobei $\tilde{E}$ ein stetig projizierter Unterraum von E ist, mit der Eigenschaft

$$\tilde{\Theta}\left(\bigcup_{z\in U}\{z\} \times Ker\hat{A}(z)\right) = U \times \tilde{E}. \tag{2.50}$$

Dann leistet der Isomorphismus $\Theta := \tilde{\Theta} \circ \Theta_{\mathcal{E}}\big|_U : \mathcal{E}\big|_U \to U \times E$ das Gewünschte, denn nach (2.48) und (2.50) gilt für jedes $z \in U$ die Gleichung

$$\Theta\left(KerA\big|_z\right) = \tilde{\Theta}\left(\Theta_{\mathcal{E}}(KerA\big|_z)\right) = \tilde{\Theta}\left(\{z\} \times Ker\hat{A}(z)\right) = \{z\} \times \tilde{E}.$$

□

Satz 2.40. *Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ holomorphe Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ein Homomorphismus, der in jeder Faser rechtsinvertierbar ist. Sei zudem $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{KerA}) = 0.$$

Beweis. Nach Satz 2.39 und Bemerkung 2.10 ist $KerA$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X. Dann folgt der Beweis direkt aus Satz 2.31. □

Satz 2.41. *Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ holomorphe Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ein Homomorphismus, der in jeder Faser rechtsinvertierbar ist, und sei $\tilde{A} : X \to Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ der definierende Schnitt von A. Dann gibt es für jeden Schnitt $f \in \mathcal{O}^{\mathcal{F}}(X)$ einen Schnitt $u \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$ mit der Eigenschaft*

$$\tilde{A}(z)u(z) = f(z),$$

für jedes $z \in X$.

Beweis. Wir wählen eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X. Nach Folgerung 2.33 gibt es Schnitte $g_i \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(U_i)$ mit der Eigenschaft

$$A(z)g_i(z) = f(z), \tag{2.51}$$

für $z \in U_i$. Sei nun $\{g_{ij}\}_{i,j \in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{E}}\right)$ ein holomorpher 1-Kozyklus mit der Eigenschaft

$$g_{ij} = g_i - g_j, \tag{2.52}$$

auf $U_i \cap U_j$. Zusammen mit der Eigenschaft (2.51) folgt daraus

$$A(g_{ij}) = A(g_i) - A(g_j) = f - f = 0,$$

auf $U_i \cap U_j$. Also gilt $\{g_{ij}\}_{i,j \in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{KerA}\right)$. Nach Satz 2.40 gibt es eine 0-Kokette $\{v_i\}_{i \in I}$ mit $v_i \in \mathcal{O}^{KerA}(U_i)$, so dass auf $U_i \cap U_j$ die Gleichung

$$g_{ij} = v_i - v_j$$

gilt. Zusammen mit der Gleichung (2.52) folgt daraus auf $U_i \cap U_j$ die Gleichung

$$v_i - v_j = g_i - g_j.$$

Also gilt auf $U_i \cap U_j$ die Gleichung

$$g_i - v_i = g_j - v_j.$$

Wir setzen nun $u := g_i - v_i$ auf U_i und erhalten einen Schnitt $u \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$ mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Satz 2.42. *Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ holomorphe Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $A : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ein holomorpher Homomorphismus, der in jeder Faser rechtsinvertierbar ist. Dann gibt es einen holomorphen Homomorphismus $B : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft*

$$AB = id, \tag{2.53}$$

auf X.

Beweis. Sei $\tilde{A} : X \to Hom(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ der definierende Schnitt von A. Seien zudem $\tilde{\mathcal{E}} := Hom(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ und $\tilde{\mathcal{F}} := Hom(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ (siehe Definition 2.13). Wir definieren einen holomorphen Schnitt $\hat{A} : X \to Hom(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$, für $z \in X$ und $R \in \tilde{\mathcal{E}}_z = L(\mathcal{F}_z, \mathcal{E}_z)$, durch die Gleichung

$$\left(\hat{A}(z)\right)(R) = \tilde{A}(z)R.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass $\hat{A}$ faserweise rechtsinvertierbar ist. Sei also $z_0 \in X$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $\tilde{A}(z_0) \in L(\mathcal{E}_{z_0}, \mathcal{F}_{z_0})$ rechtsinvertierbar.

Das heißt, dass es einen Operator $B \in L(\mathcal{F}_{z_0}, \mathcal{E}_{z_0})$ gibt, der die Eigenschaft $\tilde{A}(z_0)B = id_{\mathcal{F}_{z_0}}$ hat. Wir definieren einen Operator $\hat{B} \in L(\tilde{\mathcal{F}}_{z_0}, \tilde{\mathcal{E}}_{z_0})$ durch die Gleichung

$$\hat{B}(S) = BS,$$

für $S \in \tilde{\mathcal{F}}_{z_0}$. Dann gilt

$$(\hat{A}\hat{B})(S) = \hat{A}(\hat{B}(S)) = \tilde{A}(BS) = \tilde{A}(z_0)BS = id_{\mathcal{F}_{z_0}}S = S,$$

für alle $S \in \tilde{\mathcal{F}}_{z_0}$. Also ist $\hat{B}$ in der Faser von z_0 eine Rechtsinverse von $\hat{A}$. Wir betrachten nun den Schnitt $f = id : X \to \tilde{\mathcal{F}}$, welcher jedem $z \in X$ den identischen Operator id_z aus $\tilde{\mathcal{F}}_z$ zuordnet. Da $\hat{A}$ faserweise rechtsinvertierbar ist und $f \in \mathcal{O}^{\tilde{\mathcal{F}}}(X)$ gilt, gibt es nach Satz 2.41 einen holomorphen Schnitt $u : X \to \tilde{\mathcal{E}}$ mit der Eigenschaft

$$\hat{A}(z)u(z) = id_z,$$

für jedes $z \in X$. Dann erfüllt der durch u definierte holomorphe Homomorphismus $B : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ die Gleichung (2.53). Dies beendet den Beweis. □

Satz 2.43. *Sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser E. Dann gibt es für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von K und holomorphe Homomorphismen*

$$A : U \times (E \oplus E) \to \mathcal{E}\big|_U$$

und

$$B : \mathcal{E}\big|_U \to U \times (E \oplus E)$$

mit der Eigenschaft

$$AB = id,$$

auf U.

Für den Beweis benutzen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 2.44. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien U_1 und U_2 zwei offene, einfach zusammenhängende Mengen mit $X = U_1 \cup U_2$. Sei zudem $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über X mit der charakteristischen Faser E. Dann gibt es einen holomorphen Homomorphismus $\Phi : X \times (E \oplus E) \to \mathcal{E}$, dessen Werte rechtsinvertierbar sind.*

Beweis. Nach Satz 2.18 gibt es zwei Isomorphismen $\Gamma_1 : \mathcal{E}\big|_{U_1} \to U_1 \times E$ und $\Gamma_2 : \mathcal{E}\big|_{U_2} \to U_2 \times E$. Sei nun $(\Gamma_1^{-1}, 0) : U_1 \times E \oplus E \to \mathcal{E}\big|_{U_1}$ die Abbildung mit der Eigenschaft $(\Gamma_1^{-1}, 0)(z_1, v_1, v_2) = \Gamma_1^{-1}(z_1, v_1)$ für $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$ sowie $v_1, v_2 \in E$ und entsprechend sei $(\Gamma_2^{-1}, 0) : U_1 \times E \oplus E \to \mathcal{E}\big|_{U_2}$ die Abbildung mit der Eigenschaft $(\Gamma_2^{-1}, 0)(z_2, v_1, v_2) = \Gamma_2^{-1}(z_2, v_2)$. Dann gilt auf $U_1 \cap U_2$ die Gleichung

$$(\Gamma_1^{-1}, 0) = (0, \Gamma_2^{-1}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \Gamma_2\Gamma_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_1\Gamma_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

wobei I den Einheitsoperator in E bezeichnet. Da die Werte von

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \Gamma_2\Gamma_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_1\Gamma_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

zur Zusammenhangskomponente der Eins in $GL(E \oplus E)$ gehören, gibt es nach [GL], Theorem 0.0.1, holomorphe Operatorfunktionen $N_i \in \mathcal{O}^{GL(E\oplus E)}(U_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ mit

$$N_2 N_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \Gamma_2\Gamma_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_1\Gamma_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

wobei wir die rechte Seite als Operatorfunktion auffassen.
Wir setzen nun $\Phi := (\Gamma_1^{-1}, 0)N_1$ auf U_1 und $\Phi := (0, \Gamma_2^{-1})N_2$ auf U_2. Da die Werte von Γ_1 und Γ_2 rechtsinvertierbar sind, ist Φ in jeder Faser von $X \times (E \oplus E)$ rechtsinvertierbar. $\square$

Lemma 2.45. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, und sei $K \subseteq X$ kompakt. Dann gibt es zwei einfach zusammenhängende offene Teilmengen U_1 und U_2 von X mit $K \subseteq U_1 \cup U_2$.*

Beweis. Für $j, k \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$V_{jk}^{\varepsilon} := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, j\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} < \operatorname{Re} z < j\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad k\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} < Imz < k\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{4} \right\}.$$

Zudem sei W_j^{ε} die Vereinigung aller V_{jk} mit $V_{jk} \subseteq X$. Schließlich seien

$$U_1^{\varepsilon} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}, j \text{ gerade}} W_j^{\varepsilon}$$

und

$$U_2^{\varepsilon} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}, j \text{ ungerade}} W_j^{\varepsilon}.$$

Offenbar sind die Mengen U_1^{ε} und U_2^{ε} einfach zusammenhängende offene Teilmengen von X. Da K eine kompakte Teilmenge von X ist, gilt nun außerdem $K \subseteq U_1^{\varepsilon} \cup U_2^{\varepsilon}$, sobald ε hinreichend klein ist. Es genügt also ein $\varepsilon > 0$ hinreichend klein zu wählen. Dann leisten die Mengen $U_1 := U_1^{\varepsilon}$ und $U_2 := U_2^{\varepsilon}$ das Gewünschte. $\square$

Beweis von Satz 2.43. Aus Lemma 2.44 und Lemma 2.45 folgt, dass es eine offene Menge U mit $K \subseteq U \subseteq X$ gibt, so dass ein holomorpher Homomorphismus $A : U \times (E \oplus E) \to \mathcal{E}\big|_U$ existiert, der in jeder Faser rechtsinvertierbar ist. Nach Satz 2.42 folgt dann die Existenz eines holomorphen Homomorphismus $B : \mathcal{E}\big|_U \to U \times (E \oplus E)$ mit $AB = id$ auf U. □

Satz 2.46. *Sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei U eine relativ kompakte, offene Teilmenge von X mit stückweisem C^1-Rand, die einfach zusammenhängend bezüglich X ist. Dann gibt es für jeden stetigen Schnitt $f : \overline{U} \to \mathcal{E}$, der in U holomorph ist, und für jedes $\epsilon > 0$ einen holomorphen Schnitt $\tilde{f} : X \to \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft*

$$\max_{z \in \overline{U}} \|\tilde{f}(z) - f(z)\| < \epsilon.$$

Beweis. Sei E die charakteristische Faser von $\mathcal{E}$. Nach Satz 2.43 gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq X$ von $\overline{U}$ und zwei holomorphe Homomorphismen
$A : V \times (E \oplus E) \to \mathcal{E}\big|_V$ und $B : \mathcal{E}\big|_V \to V \times (E \oplus E)$ mit der Eigenschaft $AB = id$. Nach dem Approximationssatz von Mergeljan (vgl. z. B. [GL] Theorem 2.2.1), angewendet auf Bf, gibt es einen holomorphen Schnitt $g : X \to X \times (E \oplus E)$ mit der Eigenschaft

$$\max_{z \in \overline{U}} \|g(z) - B(z)f(z)\| < \frac{\epsilon}{\max_{z \in \overline{U}} \|A(z)\|}.$$

Dann besitzt der holomorphe Schnitt $\tilde{f} := Bg$ die gewünschte Eigenschaft. □

3 Bündel von nicht-abelschen Gruppen

3.1 Innere Bündel

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff eines Banachalgebra-Bündels und insbesondere den eines inneren Banachalgebra-Bündels ein. Wir werden zudem zeigen, dass Banachalgebra-Bündel immer normierbar sind, siehe Lemma 3.6, und dass innere Banachalgebra-Bündel, deren Basen einfach zusammenhängen, trivial sind, siehe Satz 3.7.

Definition 3.1. *Sei A eine Banachalgebra mit Einselement. Wir bezeichnen mit GA die Gruppe aller invertierbaren Elemente aus A. Zudem bezeichnen wir mit G_1A die Zusammenhangskomponente von GA, die das Einselement enthält. Eine Abbildung $T : A \to A$ heißt* **innerer Automorphismus** *von A, wenn es ein Element $g \in GA$ gibt, so dass für alle $a \in A$ die Gleichung*

$$Ta = g^{-1}ag$$

gilt.

Definition 3.2. *Ein holomorphes Banachraum-Bündel $\mathcal{A}$ über einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ mit charakteristischer Faser, deren Repräsentanten A zusätzlich Banachalgebren mit Einselement sind, nennen wir ein* **holomorphes Banachalgebra-Bündel**, *wenn für jedes $x \in X$ eine lokale Trivialisierung (U, Θ) von $\mathcal{A}$ existiert, so dass die Banachraum-Isomorphismen $\Theta(z) : \mathcal{A} \to \{z\} \times A$, $z \in U$, zusätzlich Banachalgebra-Isomorphismen sind. Eine solche Trivialisierung von $\mathcal{A}$ heißt* **Banachalgebra-Trivialisierung**. *Unter einem* **Atlas** *eines holomorphen Banachalgebra-Bündels verstehen wir einen Atlas, im Sinne von Definition 2.1, dessen Karten Banachalgebra-Isomorphismen sind.*

Definition 3.3. *Sei $\mathcal{A}$ ein holomorphes Banachalgebra-Bündel mit der charakteristischen Faser A über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X. Wir nennen einen Atlas $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i \in I}$ von $\mathcal{A}$ einen* **inneren Atlas**, *wenn die Werte der dazugehörenden Übergangsfunktionen innere Automorphismen von A sind.*

Das gilt, wenn es einen Kozyklus $\{g_{ij}(z)\}_{i,j\in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{GA}\right)$ gibt, so dass

$$\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,v) = \left(z, g_{ji}(z) v g_{ij}(z)\right),$$

für alle $i,j \in I$, $z \in U_i \cap U_j$ und $v \in A$, gilt. Ein holomorphes Banachalgebra-Bündel auf dem ein innerer Atlas ausgezeichnet ist, nennen wir ein **inneres Banachalgebra-Bündel**. *Eine holomorphe Trivialisierung (U,Θ) von $\mathcal{A}$ heißt* **innere Trivialisierung**, *wenn die Werte der Übergangsfunktion von U nach U_i für jedes $i \in I$ innere Automorphismen sind.*

Definition 3.4. *Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei innere Banachalgebra-Bündel mit der gemeinsamen charakteristischen Faser A und seien $\{(U_i, \Theta_{1,i})\}_{i\in I}$ sowie $\{(U_i, \Theta_{2,i})\}_{i\in I}$ innere Atlanten von $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$. Eine Abbildung $\Gamma : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ heißt* **innerer Isomorphismus** *von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{A}_2$, wenn es für jedes $i \in I$ eine holomorphe Abbildung $g : U_i \to GA$ gibt, so dass für $x \in U_i$ und $a \in A$ gilt:*

$$\Theta_{2,i} \circ \Gamma \circ \Theta_{1,i}^{-1}(x,a) = \Big(x, g^{-1}(x) a g(x)\Big).$$

Definition 3.5. *Unter einer* **Banachalgebra-Norm** *auf einem Banachalgebra-Bündel $\mathcal{A}$ verstehen wir eine positive, stetige Funktion $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$, deren Einschränkung auf jeder Faser $\mathcal{A}_z$ eine Banachalgebra-Norm ist, welche die Topologie von $\mathcal{A}_z$ erzeugt.*

Lemma 3.6. *Sei $\mathcal{A}$ ein Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann gibt es eine Banachalgebra-Norm auf $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir wählen einen Atlas $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$, eine Norm $\|\cdot\|_A$ von A und eine Zerlegung der Eins $\{\chi_i\}_{i\in I}$ zu $\{U_i\}_{i\in I}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\{U_i\}_{i\in I}$ lokal endlich ist. Dann ist nach Definition 2.11 für $a \in \mathcal{A}$ durch

$$\|a\|_{\mathcal{A}}^* := \sum_{i\in I} \chi_i(\pi(a)) \|\Theta_i(a)\|_A$$

eine Banachraum-Norm von $\mathcal{A}$ gegeben, wobei $\pi : \mathcal{A} \to X$ die Projektion von $\mathcal{A}$ ist. Wir betrachten nun zwei Karten (U_i, Θ_i) und (U_j, Θ_j). Nach eventuellem Verkleinern der Mengen U_i und U_j können wir annehmen, dass die Trivialisierung Θ_i in einer Umgebung von $\overline{U_i}$ und Θ_j in einer Umgebung von $\overline{U_j}$ holomorph ist. Offensichtlich gilt für $a \in \mathcal{A}$ und $i,j \in I$ mit $\pi(a) \in U_i \cap U_j$ die Gleichung

$$\Theta_i(a) = \Theta_i \circ \Theta_j^{-1} \circ \Theta_j(a).$$

Sei nun $f_j : \mathcal{A} \to A$ die Abbildung mit $\Theta_j(a) = (\pi(a), f_j(a))$, dann folgt die Gleichung

$$\|\Theta_i(a)\|_A = \|\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(\pi(a), f_j(a))\|_A. \tag{3.1}$$

Sei nun $g_{ij} : \overline{U_i} \cap \overline{U_j} \to GL(A)$ die Funktion mit

$$(\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(\pi(a), v) = (\pi(a), g_{ij}(\pi(a))v).$$

Daraus folgt zusammen mit (2.2) für $a \in \mathcal{A}$ und $v \in \mathcal{A}\big|_{\pi(a)}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|(\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(\pi(a), v)\|_A &= \|(\pi(a), g_{ij}(\pi(a)v)\|_A \\ &= \|g_{ij}(\pi(a))v\|_A \\ &\leq \|g_{ij}(\pi(a))\|_{L(A)}\|v\|_A \\ &= \|g_{ij}(\pi(a))\|_{L(A)}\|(\pi(a), v)\|_A. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Seien C_{ij} die Konstanten mit der Eigenschaft $C_{ij} = \max_{z \in \overline{U_i} \cap \overline{U_j}} \|g_{ij}(z)\|_{L(A)}$. Dann gilt wegen (2.2), (3.1) und (3.2) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\Theta_i(a)\|_A &= \|\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(\pi(a), f_j(a))\|_A \\ &\leq \|g_{ij}(\pi(a))\|_{L(A)}\|(\pi(a), f_j(a))\|_A \\ &= \|g_{ij}(\pi(a))\|_{L(A)}\|\Theta_j(a)\|_A \\ &\leq C_{ij}\|\Theta_j(a)\|_A. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wir wählen nun eine stetige Funktion $C : X \to \mathbb{R}_+$ mit

$$C(z) > C_{ij}, \tag{3.4}$$

für alle $i, j \in I$ und $z \in \overline{U}_i \cap \overline{U}_j$. Da die Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ als lokal endlich angenommen wurde, können wir für jedes $z \in \overline{U_i}$ einen Index $k \in I$ finden, so dass für alle Indizes $j \in I$ mit $z \in \overline{U_j}$ und alle $a \in \mathcal{A}_z$ die Ungleichung

$$\|\Theta_k(a)\|_A \leq \|\Theta_j(a)\|_A$$

gilt. Also existiert für $z \in X$ und $a \in \mathcal{A}_z$ das Minimum $\min_{j: z \in \overline{U_j}} \|\Theta_j(a)\|_A$. Aufgrund der Ungleichungen (3.3) und (3.4) gilt für $a \in \mathcal{A}$ die Ungleichung

$$\|a\|^*_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in I} \chi_i(\pi(a))\|\Theta_i(a)\|_A \leq C(\pi(a)) \sum_{i \in I} \chi_i(\pi(a)) \min_{j: \pi(a) \in \overline{U_j}} \|\Theta_j(a)\|_A.$$

Daraus folgt durch einfaches Umformen für jedes $a \in \mathcal{A}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|a\|^*_{\mathcal{A}} &\leq C(\pi(a)) \min_{j: \pi(a) \in \overline{U_j}} \|\Theta_j(a)\|_A \\ &= \frac{C(\pi(a))}{\sum_{i \in I} \chi_i^2(\pi(a))} \sum_{i \in I} \chi_i^2(\pi(a)) \min_{j: \pi(a) \in \overline{U_j}} \|\Theta_j(a)\|_A \\ &\leq \frac{C(\pi(a))}{\sum_{i \in I} \chi_i^2(\pi(a))} \sum_{i \in I} \chi_i^2(\pi(a))\|\Theta_i(a)\|_A. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da die Trivialisierungen $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ Isomorphismen sind, folgt aus der Ungleichung (3.5) für $z \in X$ und $a, b \in \mathcal{A}_z$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|ab\|^*_{\mathcal{A}} &\leq \frac{C(z)}{\sum_{i \in I} \chi_i^2(z)} \sum_{i \in I} \chi_i^2(z)\|\Theta_i(ab)\|_A \\ &= \frac{C(z)}{\sum_{i \in I} \chi_i^2(z)} \sum_{i \in I} \chi_i^2(z)\|\Theta_i(a)\Theta_i(b)\|_A. \end{aligned}$$

Da $\|\cdot\|_A$ eine Banachalgebra-Norm ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}
\|ab\|^*_{\mathcal{A}} &\leq \frac{C(z)}{\sum_{i\in I}\chi_i^2(z)}\sum_{i\in I}\chi_i^2(z)\|\Theta_i(a)\|_A\|\Theta_i(b)\|_A \\
&\leq \frac{C(z)}{\sum_{i\in I}\chi_i^2(z)}\sum_{i\in I}\chi_i(z)\|\Theta_i(a)\|_A\sum_{m\in I}\chi_m(z)\|\Theta_m(b)\|_A \\
&= \frac{C(z)}{\sum_{i\in I}\chi_i^2(z)}\|a\|^*_{\mathcal{A}}\|b\|^*_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $C^*(z) := \frac{C(z)}{\sum_{i\in I}\chi_i^2(z)}$ und es folgt, dass für die durch

$$\|a\|_{\mathcal{A}} := C^*(z)\sum_{i\in I}\chi_i(z)\|\Theta_i(a)\|_A$$

definierte Banachraum-Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|ab\|_{\mathcal{A}} &= C^*(z)\sum_{i\in I}\chi_i(z)\|\Theta_i(ab)\|_A \\
&\leq (C^*(z))^2\sum_{i\in I}\chi_i(z)\|\Theta_i(a)\|_A\sum_{m\in I}\chi_m(z)\|\Theta_m(b)\|_A = \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ eine Banachalgebra-Norm auf $\mathcal{A}$. □

Satz 3.7. *Sei $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ mit der charakteristischen Faser A und sei X offen und einfach zusammenhängend. Dann gibt es einen inneren Isomorphismus $\Gamma : \mathcal{A} \to X \times A$.*

Beweis. Da $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel ist, gibt es nach Definition 3.3 einen holomorphen Kozyklus $\{g_{ij}\}_{i,j\in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{GA}\right)$, so dass

$$\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,h) = \left(z, g_{ij}(z)hg_{ji}(z)\right)$$

gilt, wobei $U = \{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X ist, $z \in U_i \cap U_j$, $h \in A$ gilt und $\{(U_i, \Theta_i)\}_{i\in I}$ Trivialisierungen von $\mathcal{A}$ sind. Da X einfach zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 2.17 eine Familie von holomorphen Funktionen $\{f_i\}_{i\in I}$ mit $f_i : U_i \to GA$, so dass

$$g_{ij} = f_i f_j^{-1} \tag{3.6}$$

auf $U_i \cap U_j$ gilt. Sei nun $\Gamma_i : U_i \times A \to U_i \times A$ für jedes $i \in I$ der innere Isomorphismus mit

$$\Gamma_i(z,h) = \left(z, f_i(z)hf_i^{-1}(z)\right)$$

für $h \in A$. Dann ist durch $\Gamma_i \circ \Theta_i$ ein innerer Isomorphismus von $\mathcal{A}\big|_{U_i}$ nach $U_i \times A$ definiert.

Des Weiteren gilt
$$\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,h) = \left(z, g_{ij}(z) h g_{ji}(z)\right),$$
für $z \in U_i \cap U_j$ und $h \in A$. Wegen Gleichung (3.6) können wir dies schreiben in der Form
$$\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,h) = \Gamma_i^{-1} \circ \Gamma_j(z,h).$$
Folglich gilt die Gleichung
$$\Gamma_i \circ \Theta_i = \Gamma_j \circ \Theta_j$$
auf $\mathcal{A}\big|_{U_i \cap U_j}$. Dann können wir einen inneren Isomorphismus $\Gamma : \mathcal{A} \to X \times A$ durch
$$\Gamma = \Gamma_i \circ \Theta_i$$
auf U_i für jedes $i \in I$ definieren. □

3.2 Formulierung des Hauptresultates

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst einige Begriffe, insbesondere den des holomorphen G-Bündels, einführen, welche wir für die Formulierung von Satz 3.13 (siehe unten) benötigen. Dieser ist das Herzstück dieser Arbeit und wird ebenfalls in diesem Abschnitt formuliert. Am Ende diesen Abschnitts werden wir dann noch zeigen, dass es genügt Satz 3.13 für die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ zu beweisen und werden einen Beweis für Teil 1 von Satz 3.13 führen. Den Beweis von Teil 2 von Satz 3.13 werden wir später in Abschnitt 3.5 und für Teil 3 von Satz 3.13 in Abschnitt 3.6 angeben.

Definition 3.8. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, A eine Banachalgebra mit Einselement und sei G eine offene Untergruppe von GA. Eine Menge $\mathcal{G}$ heißt* **holomorphes G-Bündel** *über X, wenn es ein inneres Banachalgebra-Bündel $\mathcal{A}$ mit der charakteristischen Faser A gibt, so dass $\mathcal{G}$ eine Teilmenge von $G\mathcal{A}$ ist, mit der Eigenschaft:*
Es gibt einen inneren Atlas
$$\Theta_i : \mathcal{A}\big|_{U_i} \to U_i \times A,$$
für $i \in I$, von $\mathcal{A}$, der die folgenden beiden Eigenschaften hat:

1. *Ist $\mathcal{G}_z := \mathcal{G} \cap \mathcal{A}_z$, so gilt $\Theta_i \mathcal{G}_z = \{z\} \times G$, für jedes $i \in I$ und $z \in U_i$.*
2. *Es gibt einen Kozyklus $g = \{g_{ij}\}_{i,j \in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\{U_i\}_{i \in I}, \mathcal{O}^G\right)$ mit den Eigenschaften*
$$\Theta_i \circ \Theta_j^{-1}(z,v) = \left(z, g_{ij}(z) v g_{ji}(z)\right),$$
für jedes $z \in U_i \cap U_j$ und $v \in A$.

Unter einem **Schnitt** *von $\mathcal{G}$ verstehen wir einen Schnitt von $\mathcal{A}$, dessen Werte alle in $\mathcal{G}$ liegen. Mit $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}$ bezeichnen wir die Garbe aller holomorphen Schnitte von $\mathcal{G}$. Mit $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$ bezeichnen wir die Garbe aller stetigen Schnitte von $\mathcal{G}$. Wir nennen $\mathcal{A}$ ein Bündel, welches $\mathcal{G}$* **erzeugt**.

Definition 3.9. *Wir nennen eine Abbildung $m : X \to \mathbb{N}$* **Vielfachheiten-Funktion** *für X, wenn $\{z \in X | m(z) \neq 0\}$ Häufungspunkte höchstens auf ∂X hat.*

Definition 3.10. *Sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei m eine Vielfachheiten-Funktion von X und sei W die Menge ihrer Nicht-Nullstellen. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}$ die Garbe, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ den Raum $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}(U)$ zuordnet, der aus den holomorphen Schnitten $f : U \to \mathcal{E}$ besteht, die die folgende Bedingung erfüllen:*

$$f(z) = O\left(|z - w|^{m(w)}\right),$$

für $w \in W$ und $z \to w$. Wir nennen $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}$ die **Garbe mit vorgegebenen Nullen** *in $\mathcal{O}^{\mathcal{E}}$, welche von m erzeugt wird.*

Definition 3.11. *Sei $\mathcal{A}$ ein Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die offene Teilmenge*

$$G\mathcal{A} := \bigcup_{z \in X} G\mathcal{A}_z$$

von $\mathcal{A}$ heißt **Bündel der invertierbaren Elemente** *von $\mathcal{A}$. Für $U \subseteq X$, offen, sei $G\mathcal{O}^{\mathcal{A}}(U)$ die Gruppe der holomorphen Schnitte $f : U \to G\mathcal{A}$.*

Definition 3.12. *Sei $\mathcal{A}$ ein Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser A. Sei m eine Vielfachheiten-Funktion von X und sei W die Menge ihrer Nicht-Nullstellen. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}$ die Garbe, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Gruppe $\mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(U)$ zuordnet, welche aus den holomorphen Schnitten $f : U \to G\mathcal{A}$ besteht, die die folgende Bedingung erfüllen:*

$$f - 1 \in \mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{m,0}(U).$$

Wir nennen $\mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}$ die **Garbe mit vorgegebenen Einsen** *in $\mathcal{O}^{G\mathcal{A}}$, welche von m erzeugt wird.*
Sei nun G eine Untergruppe von GA und sei $\mathcal{G}$ ein holomorphes G-Bündel über X, welches von $\mathcal{A}$ erzeugt wird. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ die Untergarbe von $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{m,1}$, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Untermenge $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(U)$ von $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{m,1}(U)$ zuordnet, deren Elemente Bilder nur in $\mathcal{G}$ haben.
Mit $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ bezeichnen wir die Garbe, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Gruppe $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}(U)$ aller stetigen Schnitte $f : U \to G\mathcal{A}$ mit $f(z) \in G_1\mathcal{A}$, für alle $z \in U$ mit der Eigenschaft $m(z) \neq 0$, zuordnet.

Ziel dieser Arbeit ist es den folgenden Satz zu beweisen. Für Bezeichnungen und Terminologie sei auf den Anhang 4 verwiesen.

Satz 3.13. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei A eine Banachalgebra mit Einselement. Sei zudem G eine offene Untergruppe von GA und $\mathcal{G}$ ein holomorphes G-Bündel über X. Sei m eine Vielfachheitenfunktion von X und sei $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}$, so dass $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}$ ist. Dann gelten die folgenden drei Aussagen:*

1. *Angenommen, die Gruppe G ist zusammenhängend. Dann zerfällt jeder 1-Kozyklus mit Werten in $\mathcal{F}$.*
2. *Jeder 1-Kozyklus mit Werten in $\mathcal{F}$, der als $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus zerfällt, zerfällt auch als $\mathcal{F}$-Kozyklus.*
3. *Jedes Paar von Kozyklen mit Werten in $\mathcal{F}$, die als $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklen äquivalent sind, ist $\mathcal{F}$-äquivalent.*

Bemerkung 3.14. *Offensichtlich folgt, im Fall $\mathcal{G} = X \times G$, der Satz 1.2 direkt aus Teil 3 von Satz 3.13.*

Wir werden nun und im verbleibenden Teil der Arbeit einen Beweis von Satz 3.13 erbringen. Dabei wird uns in den Beweisen von Teil 2 und Teil 3 die folgende Vereinfachung von großem Nutzen sein.

Lemma 3.15. *Es genügt Satz 3.13 für den Fall zu beweisen, in dem $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt.*

Beweis. Angenommen, wir hätten Satz 3.13 für die Garbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gezeigt. Sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und sei $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ gegeben. Sei Z die Menge aller Nicht-Nullstellen von m. Da $Z \cap X$ diskret und abgeschlossen in X ist, können wir für jeden Punkt $z \in X$ eine offene Umgebung $V_z \subseteq X$, $z \in V_z$ finden, welche in mindestens einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$ enthalten ist, so dass

$$V_z \cap Z = \begin{cases} \{z\} & \text{falls } z \in Z, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{V} := \{V_z\}_{z \in X}$ eine offene Überdeckung von X und eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Sind nun z, w zwei verschiedene Punkte aus X, so gilt $Z \cap V_z \cap V_w = \emptyset$. Daraus folgt die Gleichung $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_z \cap V_w) = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(V_z \cap V_w)$. Da nach Voraussetzung

$$\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_z \cap V_w) \subseteq \mathcal{F}(V_z \cap V_w) \subseteq \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(V_z \cap V_w)$$

gilt, folgt daraus des Weiteren

$$\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_z \cap V_w) = \mathcal{F}(V_z \cap V_w) = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(V_z \cap V_w), \tag{3.7}$$

für alle $z, w \in X$ mit $z \neq w$.

Wir werden nun zeigen, dass Teil 1 von Satz 3.13 gilt, wenn er für die Garbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt . Wir wählen einen Kozyklus $f^* \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, der von f induziert ist. Wegen (3.7) ist f^* ein Kozyklus aus $\mathcal{Z}^1\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)$. Da wir nach Voraussetzung schon gezeigt haben, dass Teil 1 von Satz 3.13 für die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt, folgt dass f^* ein $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-trivialer Kozyklus ist. Nach Folgerung 4.10 ist dann f ebenfalls $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-trivial. Da aber $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}$ ist, folgt daraus die $\mathcal{F}$-Trivialität von f.
Wir wollen nun Teil 3 von Satz 3.13 zeigen. Seien $f, g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ zwei $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalente Kozyklen. Wir wählen zwei Kozyklen $f^*, g^* \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, die von f bzw. g induziert sind. Wegen (3.7) gilt $f^*, g^* \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)$. Da f und g $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalent sind, folgt aus Satz 4.9, dass f^* und g^* auch $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalent sind. Da wir nach Voraussetzung schon gezeigt haben, dass Teil 3 von Satz 3.13 für die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt, folgt, dass f^* und g^* $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalent sind. Nach Satz 4.9 sind dann f und g ebenfalls $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalent. Da $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}$ ist, folgt daraus die $\mathcal{F}$-Äquivalenz von f und g. Da Teil 2 von Satz 3.13 direkt aus Teil 3 von Satz 3.13 folgt, ist der Beweis beendet. □

Wir wollen nun Teil 1 von Satz 3.13 im allgemeinen Fall beweisen. Dazu benötigen wir jedoch folgendes Lemma.

Lemma 3.16. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und A eine Banachalgebra mit Einselement. Sei zudem G eine offene, zusammenhängende Untergruppe von GA und $\mathcal{G}$ ein holomorphes G-Bündel über X. Dann ist $\mathcal{G}$ holomorph isomorph zum Produktbündel $X \times G$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.7, da ein Kozyklus $g_{ij} \in \mathcal{Z}\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^G\right)$ nach Satz 2.17 auch zerfällt, wenn G zusammenhängend ist. □

Beweis von Teil 1 von Satz 3.13. Nach Lemma 3.16 ist $\mathcal{G}$ holomorph isomorph zum Produktbündel $X \times G$. Dann folgt die Behauptung direkt aus Teil ii) von Theorem 9.2.1 in [GL]. □

Bemerkung 3.17. *Offensichtlich folgt Teil 2 von Satz 3.13 aus Teil 3. Wir werden aber zuerst Teil 2 beweisen und daraus Teil 3 folgern. Dazu benötigen wir zum Einen eine neue Version des Cartanschen Lemmas, welche wir im folgenden Abschnitt angeben und beweisen werden und zum Anderen den Begriff der einfachen Erweiterung, den wir in Abschnitt 3.4 einführen.*

3.3 Das Cartansche Lemma

Wir werden in diesem Abschnitt eine neue Version des Cartanschen Lemmas, Satz 3.21, formulieren und beweisen. Dazu werden wir den Begriff eines Cartanschen Paares einführen sowie eine Reihe von Hilfssätzen angeben und zeigen. Wir gehen in diesem Kapitel davon aus, dass auf jedem Banachraum-Bündel eine Norm und auf jedem Banachalgebra-Bündel eine Banachalgebra-Norm gewählt wurde.

Definition 3.18. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel über X. Ist U eine offene, relativ kompakte Teilmenge von X, so bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{U})$ den Banachraum, welcher aus allen Schnitten $f : \overline{U} \to \mathcal{E}$ besteht, die holomorph in U und stetig auf $\overline{U}$ sind.*
Ist m eine Vielfachheiten-Funktion von X und $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel über X, so bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}_{m,0}(\overline{U})$ den Banachraum

$$\left\{ f \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{U}) \middle| f(z) = O\left(|z-w|^{m(w)}\right) \text{ für } w \in X \text{ und } z \to w \right\}.$$

Definition 3.19. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{A}$ ein Banachalgebra-Bündel über X und sei U eine offene und relativ kompakte Teilmenge von X. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(U)$ die Gruppe aller stetigen Schnitte f von $G\mathcal{A}$ über U und mit $\mathcal{C}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(\overline{U})$ bezeichnen wir die Gruppe aller stetigen Schnitte f von $G\mathcal{A}$ über $\overline{U}$, mit der Eigenschaft $f(z) \in G_1\mathcal{A}_z$, für $m(z) \neq 0$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\overline{U}$. Zudem bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}(\overline{U})$ die Gruppe aller stetigen Schnitte $f : \overline{U} \to G\mathcal{A}$, die in U holomorph sind. Ist m eine Vielfachheiten-Funktion von X, so bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(\overline{U})$ die Untergruppe von $\overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}(\overline{U})$, welche aus den Schnitten f mit $f - 1 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}_{m,o}(\overline{U})$ besteht.*

Wir werden nun im weiteren Verlauf des Kapitels Abbildungen der Form

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$$

betrachten. Wir fassen diese auch als Abbildungen auf $[0,1] \times \overline{U}$ auf. Entsprechend werden wir dann $f(t,z)$ anstelle von $(f(t))(z)$, für $t \in [0,1]$ und $z \in \overline{U}$ schreiben. Zudem schreiben wir $f(t) = 1$, um auszudrücken, dass $f(t,z) = 1$ für jedes $z \in \overline{U}$ gilt, wobei 1 das Einselement in $G\mathcal{A}_z$ ist. Entsprechend verfahren wir auch bei Abbildungen mit Werten in $\mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(U)$.

Definition 3.20. *Wir nennen ein Paar (D_1, D_2), von offenen, relativ kompakten Mengen $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein* **Cartansches Paar**, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Mengen D_1, D_2, $D_1 \cap D_2$ und $D_1 \cup D_2$ sind nicht leer und haben einen stückweisen C^1-Rand.*
2. *Die Menge $D_1 \cap D_2$ ist einfach zusammenhängend.*
3. *Es gilt $(\overline{D_1} \setminus D_2) \cap (\overline{D_2} \setminus D_1) = \emptyset$.*

Ziel dieses Kapitels ist es den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3.21. *Sei $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei m eine Vielfachheiten-Funktion von X und sei (D_1, D_2) ein Cartansches Paar mit $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \subseteq X$. Dann gilt:*

1. *Sei $m(z) = 0$ für $z \in \partial D_1 \cup \partial D_2$, sei $\epsilon > 0$ und sei*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$$

stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$. Dann gibt es zwei stetige Abbildungen

$$f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_j\right),$$

für $j \in \{1,2\}$, mit $f_j(0) = 1$ und $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_j\right)$, so dass

   a) *$f = f_1 f_2$ auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$.*

   b) *$\|f_1(t,z) - 1\| < \epsilon$ für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1$.*

2. *Für jede Umgebung $U_1 \subseteq X$ von $\overline{D}_1$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq X$ von $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, so dass Folgendes gilt: Für jede stetige Abbildung*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(U_1),$$

mit $f(0) = 1$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(U_1)$, und jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Abbildung

$$\tilde{f} : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(U)$$

mit $\tilde{f}(0) = 1$ und $\tilde{f}(1) \in \mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(U)$, so dass

$$\|f(t,z) - \tilde{f}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon,$$

für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1$, gilt.

Definition 3.22. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und sei A eine Banachalgebra mit Einselement. Mit $\rho\left(\overline{U}\right)$ bezeichnen wir die Gruppe aller stetigen Abbildungen*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{GA}\left(\overline{U}\right)$$

mit den Eigenschaften $f(0) = 1$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{GA}\left(\overline{U}\right)$. Diese betrachten wir als topologische Gruppe versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Lemma 3.23. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt, einfach zusammenhängend und habe einen stückweisen C^1-Rand. Dann ist $\rho\left(\overline{U}\right)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass U zusammenhängend ist. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz (mit Ränderzuordnung) genügt es den Fall

$$U = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$$

zu betrachten. Sei nun $f \in \rho\left(\overline{U}\right)$ gegeben. Wir definieren eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \rho\left(\overline{U}\right)$ durch die Gleichung

$$(\gamma(s))\,(t,z) = f\,(t,(1-s)z)\,, \tag{3.8}$$

für $s,t \in [0,1]$ und $z \in \overline{U}$. Dann gilt $\gamma(0) = f$ und $(\gamma(1))\,(t,z) = f(t,0)$, für $t \in [0,1]$ und $z \in \overline{U}$, d. h. γ ist ein stetiger Weg in $\rho\left(\overline{U}\right)$, welcher f mit der Abbildung $f_1 \in \rho\left(\overline{U}\right)$ verbindet, die durch die Gleichung

$$f_1(t,z) = f(t,0),$$

für $t \in [0,1]$ und $z \in \overline{U}$ definiert wird.
Wir definieren eine weitere stetige Abbildung $\lambda : [0,1] \to \rho\left(\overline{U}\right)$ durch die Gleichung

$$\lambda(s) = f\,((1-s)t,0)\,, \tag{3.9}$$

für $s,t \in [0,1]$. Dann gilt $\lambda(1) = f(0) = 1$ und $\lambda(0) = f_1$, d. h. λ ist ein stetiger Weg in $\rho\left(\overline{U}\right)$ der f_1 und 1 verbindet. □

Lemma 3.24. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und sei A eine Banachalgebra mit Einselement, so dass $\rho\left(\overline{U}\right)$ zusammenhängend ist. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jede stetige Abbildung $f \in \rho\left(\overline{U}\right)$ ein k-Tupel $(f_1, \cdots, f_k)$ aus stetigen Abbildungen $f_j \in \rho\left(\overline{U}\right)$, für $j \in \{1, \cdots, k\}$, mit den Eigenschaften*

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times U} \|f_j(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$$

und

$$f = (1+f_1)\cdots(1+f_k). \tag{3.10}$$

Beweis. Sei $\Omega \subseteq \rho\left(\overline{U}\right)$ die Menge aller Abbildungen f der Form (3.10), mit einem gewissen von f abhängigen k. Wir müssen zeigen, dass Ω offen, abgeschlossen und nicht leer in $\rho\left(\overline{U}\right)$ ist.
Da $f = 1$ in Ω liegt, ist Ω nicht leer. Sei nun $f \in \Omega$ gegeben und sei U_f die Umgebung von f, welche alle Abbildungen $g \in \rho\left(\overline{U}\right)$ enthält, für die

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}} \|f^{-1}g - 1\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$$

gilt. Dann gilt für jedes dieser g die Gleichung

$$g = ff^{-1}g = (1+f_1)\cdots(1+f_k)\left(1 + \left(f^{-1}g - 1\right)\right).$$

Also gilt $g \in \Omega$ und folglich ist Ω offen.
Sei nun $\{g_j\}_{j\in I}$ eine Folge von Abbildungen $g_i \in \Omega$ die gegen ein $f \in \rho\left(\overline{U}\right)$ konvergieren. Dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}} \|g_{j_0}^{-1} f - 1\|_{\mathcal{A}} < \epsilon.$$

Da g_{j_0} die Form (3.10) hat, mit $\|f_i\| < \epsilon$, gilt die Gleichung

$$f = g_{j_0} g_{j_0}^{-1} f = (1+f_1)\cdots(1+f_k)\left(1+\left(g_{j_0}^{-1} f - 1\right)\right).$$

Folglich gilt $f \in \Omega$. Damit ist auch die Abgeschlossenheit von Ω gezeigt. $\square$

Lemma 3.25. *Sei $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei U eine relativ kompakte, offene Teilmenge von X, mit stückweisem C^1-Rand. Zudem sei*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$$

stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$. Dann gibt es ein k-Tupel $(f_1, \cdots, f_k)$ von stetigen Abbildungen

$$f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$$

mit $j \in \{1, \cdots, k\}$, $f_j(0) = 1$ und $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$, so dass

1. *$\|f_j(t,z) - 1\|_{\mathcal{A}} < 1$, für jedes $j \in \{1, \cdots, k\}$, und $(t,z) \in [0,1] \times \overline{U}$.*
2. *$f = f_1 \cdots f_k$ auf $[0,1] \times \overline{U}$.*

Beweis. Wir wählen zunächst eine einfach zusammenhängende Umgebung $U \subseteq X$ von $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Dann gibt es nach Satz 3.7 einen inneren Isomorphismus

$$\Gamma : \mathcal{A}\big|_U \to U \times A.$$

Sei nun $\tilde{f} : [0,1] \to \mathcal{C}^A\left(\overline{U}\right)$ die stetige Abbildung mit der Eigenschaft $\Gamma(f(t,z)) = \left(z, \tilde{f}(t,z)\right)$, für $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Da $f(0) = 1$ gilt, haben wir $f(t,z) \in G_1\mathcal{A}_z$. Daraus folgt $\tilde{f}(t,z) \in G_1 A$ für, $(t,z) \in (0,1) \times \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Da die Menge $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ kompakt ist, gibt es eine Konstante $C < \infty$ mit der Eigenschaft

$$\|\Gamma^{-1}(z,v)\|_{\mathcal{A}} < C\|v\|_A, \tag{3.11}$$

für jedes $(z,v) \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \times A$.

Zudem folgt aus Lemma 3.23, zusammen mit Lemma 3.24, die Existenz eines k-Tupels $(\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_k)$ von stetigen Abbildungen $\tilde{f}_i : [0,1] \to \mathcal{C}^{GA}\left(\overline{U}\right)$ mit den Eigenschaften $\tilde{f}_i(0) = 1$, $\tilde{f}_i(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G_1 A}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)$ und

$$\|1 - \tilde{f}_i(t,z)\|_A < \frac{1}{C},$$

für alle $i \in \{1, \cdots, k\}$ und $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$, sowie

$$\tilde{f} = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_k.$$

Dann haben wegen (3.11) die stetigen Abbildungen $f_i : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{U}\right)$, welche durch $f_i(t,z) := \Gamma^{-1}((z, \tilde{f}_i(t,z)))$, für jedes $i \in \{1, \cdots, k\}$, definiert sind, die Eigenschaften $f_i(0) = 1$, $f_i(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$ und

$$\|1 - f_i(t,z)\|_{\mathcal{A}} = \|\Gamma^{-1}(z, 1 - \tilde{f}_i(t,z)\|_{\mathcal{A}} \leq C\|1 - \tilde{f}_i(t,z)\|_A < 1,$$

für jedes $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Also haben $f_1, \cdots, f_k$ die geforderten Eigenschaften. □

Satz 3.26. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{E}$ ein Banachraum-Bündel über X sowie $U \subset X$ eine relativ kompakte Teilmenge von X, die bezüglich X einfach zusammenhängend ist. Sei m eine Vielfachheitenfunktion von X, so dass $m(z) = 0$ für $z \in \partial U$ gilt. Dann gibt es für jede stetige Abbildung $f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}(\overline{U})$, mit $f(0) = 0$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}\left(\overline{U}\right)$, und jedes $\epsilon > 0$ eine stetige Abbildung $g : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}(X)$ mit den Eigenschaften $g(0) = 0$, $g(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}(X)$ und*

$$\max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{U}} \|g(t,z) - f(t,z)\| < \epsilon.$$

Beweis. Nach dem Weierstraßschen Produktsatz gibt es auf X eine holomorphe Funktion p mit der Eigenschaft

$$p(z) \neq 0,$$

für alle $z \in X$ mit $m(z) = 0$, welche an den Stellen z, an denen $m(z) > 0$ gilt, Nullstellen der Ordnung $m(z)$ hat. Sei nun für $z \in \overline{U}$ folgende Funktion definiert:

$$f^*(z) := \frac{f(1,z)}{p(z)}.$$

Dann gilt $f^* \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(\overline{U})$. Folglich gibt es nach Satz 2.46 einen Schnitt $\tilde{f}^* \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}(X)$ mit der Eigenschaft

$$\max_{z \in \overline{U}} \|f^*(z) - \tilde{f}^*(z)\|_{\mathcal{E}} < \frac{\epsilon}{\max_{z \in \overline{U}} |p(z)|}. \tag{3.12}$$

Wir definieren nun den Schnitt $\tilde{f} \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}(X)$ durch $\tilde{f}(z) := p(z)\tilde{f}^*(z)$, für $z \in X$. Dann gilt wegen (3.12) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\max_{z\in\overline{U}} \|\tilde{f}(z) - f(1,z)\|_{\mathcal{E}} &= \max_{z\in\overline{U}} \|p(z)\tilde{f}^*(z) - p(z)f^*(z)\|_{\mathcal{E}} \\
&\leq \max_{z\in\overline{U}} |p(z)| \max_{z\in\overline{U}} \|\tilde{f}^*(z) - f^*(z)\|_{\mathcal{E}} \\
&\leq \max_{z\in\overline{U}} \|p(z)\| \frac{\epsilon}{\max_{z\in\overline{U}} |p(z)|} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Sei nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$\max_{1-\delta\leq t\leq 1, z\in\overline{U}} \|f(t,z) - \tilde{f}(z)\| < \epsilon$$

gilt. Wir wählen eine stetige Abbildung

$$c : [0,1] \times X \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}(X)$$

mit den Eigenschaften

$$c(t,z) = f(t,z),$$

für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{U}$, und

$$c(0,z) = 0,$$

für alle $z \in X$. Sei zudem $\Xi : [0,1] \to [0,1]$ mit $\Xi(1) = 1$ und $\Xi(x) = 0$, für alle $x \in [0, 1-\delta]$. Wir setzen nun

$$g(t,z) = \Xi(t)\tilde{f}(z) + (1 - \Xi(t))\, c(t,z),$$

für alle $(t,z) \in [0,1] \times X$. Dann gilt

$$g(0,z) = \Xi(0)\tilde{f}(z) + (1 - \Xi(0))\, c(0,z) = c(0,z) = 0$$

und

$$g(1,z) = \Xi(1)\tilde{f}(z) + (1 - \Xi(1))\, c(1,z) = \tilde{f}(z) \in \mathcal{O}^{\mathcal{E}}_{m,0}(X).$$

Zudem gilt für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{U}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\|f(t,z) - g(t,z)\| &= \left\|f(t,z) - \Xi(t)\tilde{f}(z) - (1 - \Xi(t))\, c(t,z)\right\| \\
&= \left\|f(t,z) - \Xi(t)\tilde{f}(z) - (1 - \Xi(t))\, f(t,z)\right\| \\
&= \| - \Xi(t)\tilde{f}(z) + \Xi(t)f(t,z)\| \\
&= |\Xi(t)| \|f(t,z) - \tilde{f}(z)\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Also hat g die gewünschten Eigenschaften. □

Wir werden nun eine Variante des Approximationssatzes von Runge zeigen, welche wir später benötigen werden.

Satz 3.27. *Sei $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei (D_1, D_2) ein Cartansches Paar mit $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \subseteq X$ sowie m eine Vielfachheitenfunktion von X mit $m(z) = 0$ für $z \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Dann gibt es für jede stetige Abbildung*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}),$$

mit $f(0) = 1$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$, und jedes $\epsilon > 0$ eine stetige Abbildung

$$\tilde{f} : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(X)$$

mit den Eigenschaften $\tilde{f}(0) = 1$, $\tilde{f}(1) \in \mathcal{O}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(X)$ und

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\left(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2\right)} \|f(t,z) - \tilde{f}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon.$$

Beweis. Nach Lemma 3.25 gibt es stetige Abbildungen

$$f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2),$$

mit $j \in \{1, \cdots, k\}$, mit den Eigenschaften $f_j(0) = 0$, $f_j(1) \in \mathcal{O}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$ und

$$f = f_1 \cdots f_k \tag{3.13}$$

und $\|1 - f_j(t,z)\|_{\mathcal{A}} < 1$. Wir betrachten nun für $x \in \mathcal{A}$ die Potenzreihen

$$\log(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},$$

für $x \in \mathcal{A}$, mit $\|x\|_{\mathcal{A}} < 1$ und

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

für $x \in \mathcal{A}$ beliebig. Für diese gilt $e^{\log(x)} = x$ und es folgt wegen (3.13) die Gleichung

$$f = e^{\log(f_1)} \dots e^{\log(f_k)}.$$

Wegen Satz 3.26 gibt es Folgen von stetigen Abbildungen

$$g_i^{(n)} : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(X),$$

für $i \in \{1, \cdots, k\}$, mit den Eigenschaften $g_i^{(n)}(0) = 0$, $g_i^{(n)}(1) \in \mathcal{O}_{m,0}^{\mathcal{A}}(X)$ und

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\left(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2\right)} \|g_i^{(n)}(t,z) - \log(f_i(t,z))\| \to 0,$$

für $n \to \infty$. Wir setzen nun

$$g^{(n)} := e^{g_1^{(n)}} \cdots e^{g_k^{(n)}}$$

und erhalten so eine Folge von stetigen Abbildungen

$$g^{(n)}(0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(X)$$

mit den Eigenschaften $g^{(n)}(0) = 0$, $g^{(n)}(1) \in \mathcal{O}_{m,1}^{G\mathcal{A}}(X)$ und

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\left(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2\right)} \|f(t,z) - g^{(n)}(t,z)\|_{\mathcal{A}} \to 0,$$

für $n \to \infty$. Dies beendet den Beweis. $\square$

Lemma 3.28. *Sei $\mathcal{E}$ ein holomorphes Banachraum-Bündel über $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der charakteristischen Faser E, sei (D_1, D_2) ein Cartansches Paar mit $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \subseteq X$ und sei m eine Vielfachheiten-Funktion von X, so dass $m(z) = 0$ für alle $z \in \partial(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)$ gilt. Dann gibt es für jede stetige Abbildung*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2),$$

mit $f(0) = 0$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}_{m,0}^{\mathcal{E}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$, zwei stetige Abbildungen

$$f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_j),$$

für $j \in \{1,2\}$, mit den Eigenschaften $f_j(0) = 0$, $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}_{m,0}^{\mathcal{E}}\left(\overline{D}_j\right)$ und

$$f = f_1 + f_2$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$.

Beweis. Wir werden zuerst zeigen, dass zwei holomorphe Schnitte $h_j \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}_{m,0}\left(\overline{D}_j\right)$, mit $j \in \{1,2\}$, existieren, so dass $f(1) = h_1 + h_2$ gilt. Wir betrachten zunächst den Fall in dem $m \equiv 0$ auf $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ gilt. Sei nun also ein beliebiger Schnitt $g := f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)$ gegeben. Nach Satz 2.43 gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ sowie zwei holomorphe Homomorphismen $\Phi : U \times (E \oplus E) \to \mathcal{E}$ und $\Phi^{-1} : \mathcal{E} \to U \times (E \oplus E)$, mit der Eigenschaft

$$\Phi\Phi^{-1} = id_{\mathcal{E}}. \tag{3.14}$$

Wir betrachten nun den Schnitt $\Phi^{-1}g : \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \to U \times (E \oplus E)$. Dieser ist stetig und holomorph im Inneren von $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Nach Theorem 5.3.3. in [GL] gibt es zwei stetige Schnitte $\hat{g}_1 : \overline{D}_1 \to U \times E \oplus E$ und $\hat{g}_2 : \overline{D}_2 \to U \times E \oplus E$, welche holomorph im Inneren von $\overline{D}_1$ bzw. $\overline{D}_2$ sind, mit der Eigenschaft

$$\Phi^{-1}g = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$$

auf $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Dann folgt zusammen mit (3.14) die Gleichung

$$g = \Phi\Phi^{-1}(g) = \Phi(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) = \Phi(\hat{g}_1) + \Phi(\hat{g}_2).$$

Dann sind die Schnitte $g_1 := \Phi(\hat{g}_1) : \overline{D}_1 \to \mathcal{E}$ und $g_2 := \Phi(\hat{g}_2) : \overline{D}_2 \to \mathcal{E}$ stetig, holomorph im Inneren von $\overline{D}_1$ bzw. $\overline{D}_2$ und haben die gewünschte Eigenschaft.
Wir kommen nun zu dem Fall, in dem m Nicht-Nullstellen hat. Sei also ein beliebiger stetiger Schnitt $g := f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}_{m,0}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)$ gegeben. Da $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ kompakt ist, hat g nur endlich viele Nullstellen $z_1, \cdots, z_n$.
Wir definieren nun $h = (z - z_1)^{m(z_1)} \cdots (z - z_n)^{m(z_n)}$. Dann ist der Schnitt g/h ein Element von $\overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)$ und es gibt, wie wir oben gezeigt haben, zwei Schnitte $\tilde{g}_1 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_1)$ und $\tilde{g}_2 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}(\overline{D}_2)$, mit der Eigenschaft

$$g/h = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2.$$

Dann haben die Schnitte $g_1 := h\tilde{g}_1 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}_{m,0}(\overline{D}_1)$ und $g_2 := h\tilde{g}_2 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}_{m,0}(\overline{D}_2)$ die gewünschte Eigenschaft.
Wir wählen nun zwei stetige Abbildungen

$$\tilde{h}_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}\left(\overline{D}_j\right),$$

für $j \in \{1,2\}$, mit den Eigenschaften $\tilde{h}_j(1) = h_j$ und $\tilde{h}_j(0) = 0$. Wir setzen nun

$$c := f - \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$.

Wir wählen eine stetige Abbildung $\Xi : \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \to [0,1]$, mit $\Xi = 0$ auf $\overline{D}_1 \setminus D_2$ und $\Xi = 1$ auf $\overline{D}_2 \setminus D_1$, und setzten $\Xi_1 := \Xi$ und $\Xi_2 := 1 - \Xi$ sowie

$$f_j(t,z) = \Xi_j(z)c(t,z) + \tilde{h}_j(t,z),$$

für $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_j$. Dann gilt

$$f_j(0,z) = \Xi_j(z)\left(f(0,z) - \tilde{h}_1(0) - \tilde{h}_2(0)\right) + \tilde{h}_j(0,z) = 0$$

und

$$\begin{aligned} f_j(1,z) &= \Xi_j(z)\left(f(1,z) - \tilde{h}_1(1,z) - \tilde{h}_2(1,z)\right) + \tilde{h}_j(1,z) \\ &= \Xi_j(z)\left(f(1,z) - h_1(z) - h_2(z)\right) + h_j(z) \\ &= h_j(z). \end{aligned}$$

Also gilt $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{E}}_{m,0}\left(\overline{D}_j\right)$. Des Weiteren gilt

$$f_1 + f_2 = c + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = f$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$. Dies beendet den Beweis. $\square$

Lemma 3.29. *Sei $\mathcal{A}$ ein inneres Banachalgebra-Bündel über einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{C}$, sei m eine Vielfachheiten-Funktion von X, und sei (D_1, D_2) ein Cartansches Paar mit $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \subseteq X$, so dass $m(z) = 0$ für $z \in \partial(D_1 \cap D_2)$. Dann gibt es eine Konstante $1 < C < \infty$, so dass Folgendes gilt:*

Für jede stetige Abbildung $f : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$, mit den Eigenschaften $f(0) = 0$, $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$ und

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_1\cap\overline{D}_2} \|f(t,z) - 1\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{C},$$

gibt es stetige Abbildungen $f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}$, mit den Eigenschaften $f_j(0) = 0$, $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}\left(\overline{D}_j\right)$ und

$$f = f_1 f_2$$

auf $[0,1] \times \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$, sowie

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_j} \|f_j(t,z) - 1\|_{\mathcal{A}} \leq C \max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_1\cap\overline{D}_2} \|f(t,z) - 1\|_{\mathcal{A}}$$

mit $j \in \{1,2\}$.

Um dies zeigen zu können, benötigen wir den folgenden Hilfssatz. Ein Beweis dieses Hilfssatzes kann zum Beispiel in [GL], Lemma 5.2.1, nachgelesen werden.

Satz 3.30. *Sei A eine Banachalgebra mit Einselement 1, und sei $\|\cdot\|_A$ die Norm von A. Weiter seien A_1 und A_2 zwei Unteralgebren von A, welche das Einselement enthalten und mit ihren eigenen Normen $\|\cdot\|_{A_1}$ und $\|\cdot\|_{A_2}$ ebenfalls Banachalgebren bilden, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\|x\|_{A_j} \geq \|x\|_A$, für alle $x \in A_j$, mit $j \in \{1,2\}$.*
2. *Jedes Element $f \in A$ kann in der Form $f = f_1 + f_2$, mit $f_1 \in A_1$ und $f_2 \in A_2$, geschrieben werden.*

Dann gibt es eine Konstante $1 < C < \infty$, so dass Folgendes gilt:

Für jedes Element $f \in GA$, mit

$$\|f - 1\|_A < \frac{1}{C},$$

gibt es Elemente $\tilde{f}_1 \in GA_1$ und $\tilde{f}_2 \in GA_2$, mit

$$f = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2,$$

und

$$\|\tilde{f}_j - 1\|_{A_j} \leq C \|f - 1\|_A,$$

für $j \in \{1,2\}$.

Beweis von Lemma 3.29. Wir betrachten die Banachalgebra $\mathfrak{A}$ aller stetigen Abbildungen

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right),$$

mit den Eigenschten $f(0) = 0$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{m,0}\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$, zusammen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathfrak{A}} := \max_{(t,z) \in [0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)} \|f(t,z)\|_{\mathcal{A}}.$$

Seien zudem $\mathfrak{A}_j$, $j \in \{1,2\}$ die Banachalgebren aller stetigen Abbildungen

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}\left(\overline{D}_j\right)$$

mit den Eigenschaften $f(0) = 0$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{m,0}\left(\overline{D}_j\right)$ und den Normen

$$\|f\|_{\mathfrak{A}_j} := \max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_j} \|(t,z)\|_{\mathcal{A}}.$$

Offenbar ist dann Bedingung 1 in Satz 3.30 erfüllt. Nach Lemma 3.28 ist aber auch Bedingung 2 in diesem Satz erfüllt. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.30. □

Beweis von Satz 3.21. Wir werden zuerst die Aussage 1 zeigen. Wir wählen dazu ein D_2', so dass (D_1, D_2') ebenfalls ein Cartansches Paar ist, mit den Eigenschaften $D_2' \subseteq D_2$, $D_1 \cup D_2' = D_1 \cup D_2$ und

$$m(z) = 0 \tag{3.15}$$

auf $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2'$. Sei C die Konstante aus Satz 3.30. Wegen (3.15) gibt es dann nach Satz 3.27 eine stetige Abbildung

$$\tilde{f} : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(X)$$

mit den Eigenschaften $f(0) = 1$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{G\mathcal{A}}_{m,1}(X)$, so dass für alle $(t,z) \in [0,1] \times (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2')$ Folgendes gilt:

$$\|f(t,z) - \tilde{f}(t,z)\| < \frac{\epsilon}{2C \max_{(s,\zeta)\in[0,1]\times\overline{D}_1\cap\overline{D}_2'} \|f^{-1}(s,\zeta)\|} =: \delta_1 \tag{3.16}$$

und

$$\left\|f^{-1}(t,z) - \tilde{f}^{-1}(t,z)\right\| < \max_{(s,\zeta)\in[0,1]\times\overline{D}_1\cap\overline{D}_2'} \left\|f^{-1}(s,\zeta)\right\| =: \delta_2. \tag{3.17}$$

Aus (3.16) folgt

$$\begin{aligned} \left\|f(t,z)\tilde{f}^{-1}(t,z) - 1\right\| &= \left\|((f(t,z) - \tilde{f}(t,z))\,\tilde{f}^{-1}(t,z)\right\| \\ &< \delta_1 \left\|\tilde{f}^{-1}(t,z)\right\| \end{aligned}$$

und aus (3.17) folgt

$$\left\|\tilde{f}^{-1}(t,z)\right\| \le \left\|\tilde{f}^{-1}(t,z) - f^{-1}(t,z)\right\| + \left\|f^{-1}(t,z)\right\| < 2\delta_2.$$

Zusammen ergibt das, für alle $(t,z) \in [0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2'\right)$, die Ungleichung

$$\left\|f(t,z)\tilde{f}^{-1}(t,z) - 1\right\| < 2\delta_1\delta_2 = \frac{\epsilon}{C}.$$

Da C die Konstante aus Lemma 3.29 ist und wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\epsilon < 1$ gilt, folgt aus Lemma 3.29 zusammen mit der letzten Ungleichung die Existenz von zwei stetigen Abbildungen

$$f_1 : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(\overline{D}_1)$$

und

$$g : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_2'\right)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $f_1(0) = 1$,
- $f_1(1) \in \overline{\mathcal{O}}_{m,1}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_1\right)$,
- $g(0) = 1$,
- $g(1) \in \overline{\mathcal{O}}_{m,1}^{G\mathcal{A}}(\overline{D}_2')$,

so dass

$$f\tilde{f}^{-1} = f_1 g \tag{3.18}$$

auf $[0,1] \times (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2')$ und

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_1} \|f_1(t,z) - 1\| \leq C \max_{(t,z)\in[0,1]\times(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2')} \|f(t,z)\tilde{f}^{-1}(t,z) - 1\| < \epsilon \tag{3.19}$$

gelten. Für dieses f_1 gilt also die Abschätzung (1b).

Wir setzen nun $f_2' = g\tilde{f}$ auf D_2'. Dann gilt wegen (3.18) die Gleichung

$$f = f_1 f_2' \tag{3.20}$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2'\right)$. Da f auf ganz $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$ (und nicht nur auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2'\right)$) definiert ist, folgt aus (3.20), dass man durch

$$f_2 = f_2'$$

auf $[0,1] \times \overline{D}_2'$, und

$$f_2 = f_1^{-1} f \tag{3.21}$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2\right)$, eine stetig Abbildung

$$f_2 : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}\left(\overline{D}_2\right)$$

widerspruchsfrei definieren kann. Aus den entsprechenden Eigenschaften von f_2', f^{-1} und f folgt dann, dass $f_2(0) = 1$ ist und $f_2(1)$ zu $\mathcal{O}_{m,1}^{G\mathcal{A}}(\overline{D}_2)$ gehört. Wegen (3.21) gilt Gleichung (1a).

Wir werden nun die Aussage 2 zeigen. Wir wählen ein Cartansches Paar (D_1', D_2') mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&\overline{D}_1' \cup \overline{D}_2' \subseteq X, \\
&\overline{D}_1 \subseteq D_1' \quad \text{und} \quad \overline{D}_1' \subseteq U_1, \\
&\overline{D}_2 \subseteq D_2', \\
&m = 0 \quad \text{auf} \quad \partial D_1' \cup \partial D_2',
\end{aligned}$$

und setzen $U = D_1' \cup D_2'$.

Dann gibt es nach Aussage 1 stetige Abbildungen

$$f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}} \left(\overline{D}_j' \right),$$

für $j \in \{1,2\}$, mit den Eigenschaften $f_j(0) = 1$ und $f_j(1) \in \overline{\mathcal{O}}_{m,1}^{G\mathcal{A}} \left(\overline{D}_j' \right)$, so dass

$$f = f_1 f_2$$

auf $[0,1] \times \left(\overline{D}_1' \cap \overline{D}_2' \right)$ und

$$\left\| 1 - f_1^{-1}(t,z) \right\| < \frac{\epsilon}{\| f(t,z) \|}, \tag{3.22}$$

für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1$, gilt. Daraus folgt

$$f_1^{-1} f = f_2 \quad \text{auf} \quad [0,1] \times (\overline{D}_1' \cap \overline{D}_2').$$

Also können wir durch

$$\tilde{f} := f_1^{-1} f$$

auf $[0,1] \times D_1'$ und

$$\tilde{f} := f_2$$

auf $[0,1] \times D_2'$ eine stetige Abbildung

$$\tilde{f} : [0,1] \to \mathcal{C}^{G\mathcal{A}}(U)$$

mit den Eigenschaften $\tilde{f}(0) = 1$ und $\tilde{f}(1) \in \mathcal{O}_{m,1}^{G\mathcal{A}}(U)$ definieren. Aus (3.22) folgt dann, für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_1$, die Abschätzung

$$\| f(t,z) - \tilde{f}(t,z) \| = \left\| f(t,z) - f_1^{-1}(t,z) f(t,z) \right\| = \left\| 1 - f_1^{-1}(t,z) \right\| \| f(t,z) \| < \epsilon.$$

Dies beendet den Beweis. □

3.4 Einfache Erweiterungen

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff einer Kette von einfachen Erweiterungen ein. Zudem werden wir zeigen, dass jede nicht-leere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ von einer solchen Kette ausgeschöpft wird, siehe dazu Satz 3.32 unten.

Definition 3.31. *Seien A und B zwei beschränkte, offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit stückweisem C^1-Rand. Wir nennen B eine* **einfache Erweiterung** *von A, wenn $A \subseteq B$ gilt und entweder $\overline{B} \setminus A = \emptyset$ gilt oder ein Cartansches Paar (D_1, D_2) mit den folgenden Eigenschaften existiert:*

1. *D_2 ist ein Quadrat.*
2. *$A = D_1$ und $B = D_1 \cup D_2$.*

Unter einer **Kette von einfachen Erweiterungen** *verstehen wir eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ von beschränkten, offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, so dass Folgendes gilt:*

1. *Für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist A_{j+1} eine einfache Erweiterung von A_j.*
2. *A_0 ist ein Quadrat.*

Wir werden sagen, dass eine solche Kette eine offene Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ **ausschöpft***, wenn*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X \tag{3.23}$$

und

$$\overline{A}_j \subseteq X \tag{3.24}$$

für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

Unser nächstes Ziel ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.32. *Für jede nicht-leere, offene Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ gibt es eine Kette $(A_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ von einfachen Erweiterungen, welche X ausschöpft.*

Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition 3.33. *Eine Menge der Form*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \frac{j}{2^\mu} \leq Re(z) \leq \frac{j+1}{2^\mu} \text{ und } \frac{k}{2^\mu} \leq Im(z) \leq \frac{k+1}{2^\mu} \right\}, \tag{3.25}$$

wobei $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt, nennen wir **Standardquadrat***. Ist Q ein Standardquadrat, so bezeichnen wir mit ∂Q den Rand von Q. Es sei zudem $\overset{o}{Q} := Q \setminus \partial Q$ und*

$$\Gamma_j := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| -j \leq Re(z) \leq j \quad \text{und} \quad -j \leq Im(z) \leq j \right\},$$

für $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für $M \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $[M]^\mu$ die Vereinigung aller Standardquadrate der Seitenlänge $2^{-\mu}$, die in M enthalten sind.

Wir wollen an dieser Stelle einige einfache Relationen nennen, welche wir später benötigen werden.

Lemma 3.34. *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, dann gelten die folgenden Gleichungen für alle $j, \mu, \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:*

1. $[\Gamma_j]^\mu = \Gamma_j$.
2. $\left[\overline{\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j}\right]^\mu = \overline{\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j}$.
3. $\left[M \cap \Gamma_j\right]^\mu \cup \left[M \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}\right]^\mu = \left[M \cap \Gamma_{j+1}\right]^\mu$.
4. $[[M]^\mu]^\nu = [M]^\mu$, *wenn* $\mu \leq \nu$ *gilt.*

Lemma 3.35. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $X \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Folge von Standardquadraten $(Q_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, so dass Folgendes gilt:*

1. *Für alle $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \neq m$ gilt $\overset{o}{Q}_n \cap \overset{o}{Q}_m = \emptyset$.*
2. *$\partial Q_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
3. *Es gibt streng monoton wachsende Folgen $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Zahlen aus $\mathbb{N}$, so dass $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$, für alle $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gilt.*
4. *$\bigcup_{n=1}^\infty Q_n = X$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass 4. aus 3. folgt. Sei also 3. erfüllt. Die Beziehung $\bigcup_{n=1}^\infty Q_n \subseteq X$ ist dann offensichtlich. Wir müssen also noch $X \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$ zeigen. Sei $z \in X$ gegeben. Da X offen ist, müssen $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und ein Standardquadrat Q der Seitenlänge μ und den Eigenschaften $z \in Q$ und $Q \subseteq X$ existieren. Wir wählen nun $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so groß, dass $Q \subseteq \Gamma_j$ und $\mu_j \geq \mu$ gilt. Dann folgt

$$Q \subseteq X \cap \Gamma_j$$

und

$$[Q]^{\mu_j} = Q.$$

Zusammen mit 3. folgt daraus

$$z \in Q = [Q]^{\mu_j} \subseteq [X \cap \Gamma_j]^{\mu_j} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j}.$$

Also folgt 4. aus 3. Der Beweis des Lemmas folgt nun durch vollständige Induktion über $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang: Es gibt Zahlen $\mu_1, n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie Standardquadrate $Q_1, \ldots, Q_{n_1}$, so dass Folgendes gilt:

- $(i)_1$ $\overset{o}{Q}_n \cap \overset{o}{Q}_m = \emptyset$, für $1 \leq n \leq n_1$ und $1 \leq m \leq n_1$, mit $n \neq m$, und die Seitenlängen der Quadrate $Q_1, \ldots, Q_{n_1}$ sind gleich $2^{-\mu_1}$.
- $(ii)_1$ $\partial Q_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ für $1 \leq n \leq n_1 - 1$.
- $(iii)_1$ $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_1} = [X \cap \Gamma_1]^{\mu_1}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass es für ein beliebiges $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Zahlen $\mu_1 < \ldots < \mu_j$ und $n_1 < \ldots < n_j$ in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie Standardquadrate $Q_1, \ldots, Q_{n_j}$ gibt, so dass Folgendes gilt:

$(i)_j$ Für $1 \leq n \leq n_j$ und $1 \leq m \leq n_j$, mit $n \neq m$, gilt sowohl $\overset{o}{Q}_n \cap \overset{o}{Q}_m = \emptyset$ als auch, dass die Seitenlängen der Quadrate $Q_1, \ldots, Q_{n_1}$ gleich $2^{-\mu_1}$ sind, sowie, dass für alle $1 \leq i \leq j-1$ die Seitenlängen der Quadrate $Q_{n_i+1}, \ldots, Q_{n_{i+1}}$ gleich $2^{-\mu_{i+1}}$ sind.

$(ii)_j$ $\partial Q_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ für $1 \leq n \leq n_j - 1$.

$(iii)_j$ $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$.

Dann gibt es Zahlen $\mu_{j+1} > \mu_j$ und $n_{j+1} > n_j$ sowie paarweise verschiedene Standartquadrate $R_{n_j}, \ldots, R_{n_{j+1}}$, so dass Folgendes gilt:

$(i)_{j+1}$ Für $n_j + 1 \leq n < m \leq n_{j+1}$ gilt $\overset{o}{R}_n \cap \overset{o}{R}_m = \emptyset$ und die Seitenlängen der Quadrate $R_{n_j+1}, \ldots, R_{n_{j+1}}$ sind gleich $2^{-\mu_{j+1}}$.

$(ii)_{j+1}$ $\partial R_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} \cup R_{n_j+1} \cup \ldots \cup R_n$ für $n_j \leq n \leq n_{j+1} - 1$.

$(iii)_{j+1}$ $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} \cup R_{n_j+1} \cup \ldots \cup R_{n_{j+1}} = \left[X \cap \Gamma_{j+1}\right]^{\mu_{j+1}}$.

Wir wollen nun den Induktionsanfang zeigen. Da X offen ist und $X \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ gilt, können wir ein $\mu_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wählen, so dass mindestens ein Standardquadrat der Seitenlänge $2^{-\mu_1}$ in $X \cap \Gamma_1$ enthalten ist. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Standardquadrate mit der Seitenlänge $2^{-\mu_1}$, die im Quadrat Γ_1 enthalten sind. Sei zudem $\mathcal{N}$ die Teilmenge aller Quadrate von $\mathcal{M}$, die in X enthalten sind. Also gilt

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{M}} Q = \Gamma_1 \tag{3.26}$$

und

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{N}} Q = [X \cap \Gamma_1]^{\mu_1}. \tag{3.27}$$

Offenbar kann man $\mathcal{M}$ so anordnen, dass jedes Quadrat aus $\mathcal{M}$ mindestens eine Seite hat, die nicht in der Vereinigung der vorangehenden Quadrate aus $\mathcal{M}$ enthalten ist. Dann können wir in $\mathcal{N}$ eine entsprechende Ordnung induzieren. Wir setzen n_1 gleich der Anzahl von $\mathcal{N}$ und bezeichnen mit $Q_1, \ldots, Q_{n_1}$ die entsprechend durchnumerierten Quadrate aus $\mathcal{N}$. Dann ist $(ii)_1$ offenbar erfüllt. Aufgrund der Beziehung (3.27) ist die Bedingung $(iii)_1$ erfüllt und die Bedingung $(i)_1$ gilt nach der Wahl der Q_n. Also gilt der Induktionsanfang.
Wir betrachten nun den Fall, in dem $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j} = X \cap \Gamma_j$ gilt. Dann gilt

$$\Gamma_j \subseteq X. \tag{3.28}$$

Da X offen und Γ_j abgeschlossen ist, folgt daraus die Beziehung

$$X \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)} \neq \emptyset.$$

Also können wir eine natürliche Zahl $\mu_{j+1} > \mu_j$ wählen, so dass $X \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}$ mindestens ein Standardquadrat der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$ enthält.

Sei $\mathcal{N}$ die Menge aller Standardquadrate der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$, die in $X \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}$ enthalten sind. Also gilt

$$\bigcup_{R \in \mathcal{N}} R = \left[X \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}\right]^{\mu_{j+1}}. \tag{3.29}$$

Aus $(iii)_j$ folgt zusammen mit (3.28) und der Beziehung 1 aus Lemma 3.34 die Gleichung

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j} = \left[\Gamma_j\right]^{\mu_j} = \left[\Gamma_j\right]^{\mu_{j+1}} = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_{j+1}}.$$

Zusammen mit (3.29) und der Beziehung 3 aus Lemma 3.34 folgt daraus die Gleichung

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} \cup \bigcup_{R \in \mathcal{N}} R = \left[X \cap \Gamma_{j+1}\right]^{\mu_{j+1}}. \tag{3.30}$$

Sei nun $\mathcal{M}$ die Menge aller Standardquadrate der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$, welche in $\overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}$ enthalten sind. Offenbar kann man $\mathcal{M}$ so anordnen, dass jedes Quadrat R aus $\mathcal{M}$ mindestens eine Seite hat, welche nicht in der Vereinigung von Γ_j mit vorherigen Quadraten aus $\mathcal{M}$ enthalten ist. Dann können wir in $\mathcal{N}$ eine entsprechende Ordnung induzieren. Sei κ die Anzahl von $\mathcal{N}$, $n_{j+1} = n_j + \kappa$, und $R_{n_j+1}, \ldots, R_{n_{j+1}}$ die entsprechend durchnumerierten Elemente aus $\mathcal{N}$. Offenbar gilt dann die Bedingung $(ii)_{j+1}$. Zudem folgt die Bedingung $(iii)_{j+1}$ aus (3.30) und die Bedingung $(i)_{j+1}$ gilt nach der Wahl der R_n.
Wir müssen nun noch den Fall betrachten, in dem $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j} \neq X \cap \Gamma_j$ gilt. Da X offen ist, muss $X \cap \Gamma_j$, für ein hinreichend großes $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mindestens ein Standardquadrat der Seitenlänge $2^{-\mu}$ enthalten, das nicht in $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$ enthalten ist. Sei μ_{j+1} als die kleinste Zahl in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit dieser Eigenschaft. Wir werden zeigen, dass dann

$$\mu_{j+1} > \mu_j \tag{3.31}$$

gilt. Angenommen, es gilt $\mu_{j+1} \leq \mu_j$. Dann gibt es ein Standardquadrat P mit einer Seitenlänge, die größer oder gleich $2^{-\mu_j}$ ist, welches in $X \cap \Gamma_j$ und nicht in $[X \cap \Gamma_j]^{\mu_j}$ enthalten ist. Dann muss aber mindestens eines der Standardquadrate der Seitenlänge $2^{-\mu_j}$, aus denen P zusammengesetzt ist, in $X \cap \Gamma_j$ und nicht in $[X \cap \Gamma_j]^{\mu_j}$ enthalten sein. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $[X \cap \Gamma_j]^{\mu_j}$.
Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Standardquadrate der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$ die in $X \cap \Gamma_j$ und nicht in $[X \cap \Gamma_j]^{\mu_j}$ enthalten sind. Dann gilt

$$\bigcup_{R \in \mathcal{K}} R = \overline{\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_{j+1}} \setminus \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}}.$$

Aus (3.31) und der Beziehung 4 aus Lemma 3.34 folgt dann

$$\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j} \cup \bigcup_{R \in \mathcal{K}} R = \left[\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}\right]^{\mu_{j+1}} \cup \bigcup_{R \in \mathcal{K}} R = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_{j+1}}. \tag{3.32}$$

Wir werden nun zeigen, dass für jedes Quadrat $R \in \mathcal{K}$ die Beziehung

$$\partial R \not\subset \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j} \cup \bigcup_{P \in \mathcal{K} \setminus \{R\}} P \tag{3.33}$$

gilt. Angenommen, es gibt ein $R \in \mathcal{K}$, für dass (3.33) nicht gilt. Wir betrachten die acht Standardquadrate $P_1, \ldots, P_8$ der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$, die an R angrenzen. Dann gibt es für jedes $j \in \{1, \cdots, 8\}$ zwei Möglichkeiten: Entweder gilt $P_j \in \mathcal{K}$ oder es gibt ein Standardquadrat S mit der Seitenlänge $2^{-\mu_j}$ und der Eigenschaft $P_j \subseteq S \subseteq \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$. In beiden Fällen gilt $P_j \subseteq X \cap \Gamma_j$. Daraus folgt die Beziehung

$$R \cup P_1 \cup \ldots \cup P_8 \subseteq X \cap \Gamma_j. \tag{3.34}$$

Sei Z das eindeutig bestimmte Standardquadrat mit der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}+1}$ und der Eigenschaft

$$Z \subseteq R \cup P_1 \cup \ldots \cup P_8.$$

Wegen (3.34) gilt dann $Z \subseteq X \cap \Gamma_j$. Zudem gilt $R \subseteq Z$. Wegen $R \not\subset \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$ folgt daraus die Beziehung $Z \not\subset \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$. Also ist Z ein Standardquadrat der Seitenlänge $2^{-(\mu_{j+1}-1)}$, welches in $X \cap \Gamma_j$ und nicht in $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_j}$ enthalten ist. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von μ_{j+1} und somit ist (3.33) bewiesen.
Sei nun κ die Anzahl von $\mathcal{K}$ und seien $R_{n_j+1}, \ldots, R_{n_j+\kappa}$ die Quadrate aus $\mathcal{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

$(i)'_{j+1}$ Die Quadrate $R_{n_j+1}, \ldots, R_{n_j+\kappa}$ haben die Seitenlängen $2^{-\mu_{j+1}}$.
$(ii)'_{j+1}$ $\partial R_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} \cup R_{n_j+1} \cup \ldots \cup R_n$, für jedes $n \in \{n_j, \cdots, n_j + \kappa - 1\}$.
$(iii)'_{j+1}$ $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_j} \cup R_{n_j+1} \cup \ldots \cup R_{n_j+\kappa} = \left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu_{j+1}}$.

Die Aussage $(i)'_{j+1}$ gilt nach Definition von $\mathcal{K}$. Die Aussage $(ii)'_{j+1}$ folgt aus (3.33) und $(iii)'_j$. Die Aussage $(iii)'_{j+1}$ folgt aus $(iii)_j$ und (3.32). Angenommen, es gilt die Gleichung $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu'_{j+1}} = \left[X \cap \Gamma_{j+1}\right]^{\mu'_{j+1}}$. Dann setzen wir $n_{j+1} = n'_{j+1}$, wodurch die Aussagen $(i)'_{j+1}$, $(ii)'_{j+1}$ und $(iii)'_{j+1}$ in die zu beweisenden Aussagen $(i)_{j+1}$, $(ii)_{j+1}$ und $(iii)_{j+1}$ übergehen. Angenommen, es gilt die Ungleichung $\left[X \cap \Gamma_j\right]^{\mu'_{j+1}} \neq \left[X \cap \Gamma_{j+1}\right]^{\mu'_{j+1}}$. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Standardquadrate mit der Seitenlänge $2^{-\mu_{j+1}}$, die in $\overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}$ enthalten sind. Zudem sei $\mathcal{M}$ so angeordnet, dass jedes Quadrat aus $\mathcal{M}$ mindestens eine Seite hat, welche nicht in der Vereinigung von Γ_j mit den vorherigen Quadraten von $\mathcal{M}$ enthalten ist. Des Weiteren sei $\mathcal{N}$ die Teilmenge von $\mathcal{M}$, die aus den Quadraten besteht, die in $X \cap \overline{(\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j)}$ enthalten sind. Dann ist die Gleichung (3.29) erfüllt. Wir geben $\mathcal{N}$ die von $\mathcal{M}$ induzierte Ordnung und setzen λ gleich der Anzahl von $\mathcal{N}$. Wir setzen $n_{j+1} = n_j + \kappa + \lambda$ und bezeichnen mit $R_{n_j+\kappa+1}, \ldots, R_{n_{j+1}}$ die entsprechend durchnumerierten Quadrate aus $\mathcal{N}$. Dann gilt $(i)_{j+1}$ nach der Wahl der R_n. Die Aussage $(ii)_{j+1}$ folgt aus $(iii)'_{j+1}$ und $(ii)'_{j+1}$. Die Aussage $(iii)_{j+1}$ folgt aus $(iii)'_{j+1}$ und (3.29). Dies beendet den Beweis. $\square$

Beweis von Satz 3.32. Da X nicht leer ist, können wir nach eventueller Verschiebung voraussetzen, dass $X \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ gilt. Sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ wie in Lemma 3.35, und seien $r_n, s_n \in \mathbb{Z}$ und $\nu_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Zahlen mit der Eigenschaft

$$Q_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \frac{r_n}{2^{\nu_n}} \leq Re(z) \leq \frac{r_n+1}{2^{\nu_n}} \text{ und } \frac{s_n}{2^{\mu_n}} \leq Im(z) \leq \frac{s_n+1}{2^{\mu_n}} \right\}.$$

Wir wählen nun Zahlen $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so, dass für die offenen Quadrate

$$U_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \frac{r_n}{2^{\mu_n}} - \varepsilon_n < Re(z) < \frac{r_n+1}{2^{\mu_n}} + \varepsilon_n \text{ und } \frac{s_n}{2^{\mu_n}} - \varepsilon_n < Im(z) < \frac{s_n+1}{2^{\mu_n}} + \varepsilon_n \right\}$$

die Beziehung

$$\overline{U}_n \subseteq X, \tag{3.35}$$

für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gilt. Außerdem seien die ε_n so klein gewählt, dass

$$\varepsilon_n < \frac{2^{-\mu_n}}{8},$$

für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gilt. Wir setzen nun $A_n = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Offenbar gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- Die Menge $A_n \cap U_{n+1}$ ist entweder leer oder ihr Rand ist stückweise C^1.
- Der Rand von $A_n \cup U_{n+1}$ ist stückweise C^1.
- $\left(\overline{A}_n \setminus U_{n+1}\right) \cap \left(\overline{U}_{n+1} \setminus A_n\right) = \emptyset$.

Außerdem folgt dann aus 2 in Lemma 3.35, dass die Menge $A_n \cap U_{n+1}$ stets einfach zusammenhängend ist, d.h. (A_n, U_{n+1}) ist ein Cartansches Paar, wenn die Menge $A_n \cap U_{n+1}$ nicht leer ist. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ist also eine Kette von einfachen Erweiterungen. Aus (3.35) und 4 in Lemma 3.35 folgt, dass X von dieser Kette ausgeschöpft wird. Dies beendet den Beweis. □

Satz 3.36. *Sei $Q \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Quadrat, sei $X \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von Q, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es ein N-Tupel von offenen Quadraten $U_1, \ldots, U_N$, so dass mit $A_n := U_1 \cup \ldots \cup U_n$ Folgendes gilt:*

1. *Für jedes $n \in \{1, \cdots, N\}$ existiert mindestens eine Menge aus $\mathcal{U}$, die $\overline{U}_n$ enthält.*
2. *Für jedes $n \in \{1, \cdots, N-1\}$ ist A_{n+1} eine einfache Erweiterung von A_n.*
3. *$Q \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N \subseteq X$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $Q = \Gamma_1$ gilt. Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von Γ_1 ist und da Γ_1 kompakt ist, können wir ein $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ finden, dass jedes Standardquadrat mit der Seitenlänge $2^{-\mu}$, welches in Γ_1 enthalten ist, mindestens in einer Menge aus $\mathcal{U}$ enthalten ist. Sei $Q_1, \cdots, Q_N$ die geordnete Menge aller Standardquadrate mit der Seitenlänge $2^{-\mu}$, welche in Γ_1 enthalten sind. Dabei sei die Anordnung so gewählt, dass $\partial Q_{n+1} \not\subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ für jedes $n \in \{1, \cdots, N-1\}$ gilt. Zudem seien $r_n, s_n \in \mathbb{Z}$ die Zahlen mit den Eigenschaften

$$Q_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \Big| \frac{r_n}{2^\mu} \leq Re(z) \leq \frac{r_n + 1}{2^\mu} \text{ und } \frac{s_n}{2^\mu} \leq Im(z) \leq \frac{s_n + 1}{2^\mu} \right\}.$$

Dann genügt es ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ zu wählen und

$$U_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \Big| \frac{r_n}{2^\mu} - \varepsilon < Re(z) < \frac{r_n + 1}{2^\mu} + \varepsilon \text{ und } \frac{s_n}{2^\mu} - \varepsilon < Im(z) < \frac{s_n + 1}{2^\mu} + \varepsilon \right\}$$

zu setzen. Dies beendet den Beweis. □

3.5 Eine spezielle Garbe von Gruppen

Wir werden in diesem Kapitel zunächst die Garbe ρ einführen und zeigen, dass jeder 1-Kozyklus mit Werten in ρ zerfällt. Danach werden wir Teil 2 von Satz 3.13 beweisen. Im Verlauf des gesamten Kapitels sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{A}$ ein holomorphes, inneres Banachalgebra-Bündel über X mit der charakteristischen Faser A und m eine Vielfachheitenfunktion für X. Zudem sei G eine offene Untergruppe von GA und $\mathcal{G} \subseteq G\mathcal{A}$ ein holomorphes G-Bündel über X.

Definition 3.37. *Wir führen über X eine Garbe (von Gruppen) ρ ein, indem wir für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Gruppe $\rho(U)$ aller stetigen Abbildungen*

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}(U)$$

mit den Eigenschaften $f(0) = 1$ und $f(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(U)$ definieren. Zudem sei $\rho(\overline{V})$, für jede offene und relativ kompakte Teilmenge V von X, die Gruppe aller stetigen Abbildungen

$$f : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}\left(\overline{V}\right)$$

mit den Eigenschaften $f(0) = 1$ und $f(1) \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}_{m,1}\left(\overline{V}\right)$.

Wir beweisen nun zuerst zwei Lemmata für die Garbe ρ (vgl. Anhang für die Bezeichnungen und die Terminologie):

Lemma 3.38. *Sei $f = (f, \mathcal{U})$ ein 1-Kozyklus mit Werten in der Garbe ρ, und sei $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen, relativ kompakten Teilmengen von X, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\overline{D}_n \subseteq D_{n+1}$.
2. $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = X$.
3. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann jedes $f \in \rho(D_{n+1})$ gleichmäßig auf $\overline{D}_n$ durch Elemente aus $\rho(X)$ approximiert werden.*
4. $f\big|_{D_n}$ *zerfällt für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann zerfällt f.

Beweis. Für $a \in \mathcal{G}$ setzen wir

$$\operatorname{dist}(a, \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}) := \inf_{b \in \mathcal{A}_a \setminus \mathcal{G}_a} \|a - b\|_{\mathcal{A}}.$$

Wegen Folgerung 4.10 können wir annehmen, dass jedes U_i aus der Überdeckung $\mathcal{U}$ eine offene, in X relativ kompakte Kreisscheibe ist, dass $f_{jk} \in \rho\left(\overline{U}_j \cap \overline{U}_k\right)$ für alle $j, k \in I$ gilt und es für jedes $j \in I$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\overline{U}_j \subseteq D_n, \tag{3.36}$$

für alle $n \geq n_j$, gibt. Zudem können wir annehmen, dass es für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ nur eine endliche Anzahl von Indizes $j \in I$ gibt, mit der Eigenschaft $U_j \cap K \neq \emptyset$. Zum Beweis des Lemmas genügt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Familien $f_n = \{f_{n,j}\}_{j\in I}$ aus Schnitten $f_{n,j} \in \rho\left(D_{n+1} \cap \overline{U}_j\right)$ sowie eine Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven Zahlen zu finden, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

$$f_{jk}(t) = f_{n,j}^{-1}(t) f_{n,k}(t) \tag{3.37}$$

auf $D_{n+1} \cap \overline{U}_j \cap \overline{U}_k$, für $j, k \in I$ und $t \in [0,1]$,

$$\epsilon_n < \frac{1}{4} \min_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_n \cap \overline{U}_j} \operatorname{dist}\left(f_{n,j}(t,z), \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}\right), \tag{3.38}$$

für $j \in I$,

$$\max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_n \cap \overline{U}_j} \|f_{n,j}(t,z) - f_{n-1,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon_{n-1}, \tag{3.39}$$

für $n \geq 1$ und $j \in I$, sowie, für $n \geq 1$, die Ungleichung

$$\epsilon_n < \frac{\epsilon_{n-1}}{2}. \tag{3.40}$$

Denn dann folgt aus (3.36),(3.39) und (3.40), für alle $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n_j \leq n < p$, die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_{p,j}(t,z) - f_{n,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} \\
= \; & \max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_{p,j}(t,z) - f_{p-1,j}(t,z) + f_{p-1,j}(t,z) - \cdots + f_{n+1,j}(t,z) - f_{n,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} \\
\leq \; & \max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_{p,j}(t,z) - f_{p-1,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} + \cdots + \max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_{n+1,j}(t,z) - f_{n,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} \\
< \; & \epsilon_{p-1} + \cdots + \epsilon_{n+1} + \epsilon_n \\
< \; & \frac{\epsilon_n}{2^{p-1-n}} + \cdots + \frac{\epsilon_n}{2} + \epsilon_n \\
< \; & 2\epsilon_n.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, wegen (3.40), dass für jedes $j \in I$ die Folge $\left(f_{n,j}\right)_{n\geq n_j}$ auf $[0,1] \times \overline{U}_j$ gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $f_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}\left(\overline{U}_j\right)$ mit den Eigenschaften $f_j(0) = 1$ und $f_j(1) - 1 \in \overline{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}_{m,0}\left(\overline{U}_j\right)$ konvergiert, so dass

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_j(t,z) - f_{n,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} \leq 2\epsilon_n,$$

für $n \geq n_j$, gilt. Zusammen mit (3.38) folgt daraus

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \|f_j(t,z) - f_{n,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{2} \min_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{U}_j} \operatorname{dist}\left(f_{n,j}(t,z), \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}\right),$$

für $n \geq n_j$. Folglich gilt $f_j(t,z) \in \mathcal{G}$ für alle $(t,z) \in [0,1] \times \overline{U}_j$ und $j \in I$. Also gilt $f_j \in \rho\left(\overline{U}_j\right)$ für jedes $j \in I$. Wir können dann zum Grenzwert für $n \to \infty$ in (3.37) übergehen und erhalten $f_{jk} = f_j^{-1} f_k$ auf $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$, für alle $j, k \in I$. Folglich zerfällt f.

Wir werden nun die Existenz einer solchen Folge beweisen. Zunächst gilt nach Voraussetzung 4, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Kozyklen $f\big|_{D_{n+2}}$ zerfallen. Folglich können wir eine Folge $\left(\tilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Familien $\tilde{f}_n := \{\tilde{f}_{n,j}\}_{j\in I}$ von Abbildungen $\tilde{f}_{n,j} \in \rho\left(D_{n+2} \cap U_j\right)$ finden, so dass

$$f_{jk} = \tilde{f}_{n,j}^{-1} \tilde{f}_{n,k} \tag{3.41}$$

auf $[0,1] \times D_{n+2} \cap U_j \cap U_k$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j, k \in I$, gilt. Wir zeigen nun, dass sogar $\tilde{f}_{n,j} \in \rho\left(D_{n+2} \cap \overline{U}_j\right)$, für alle $j \in I$ und $n \in \mathbb{N}$, gilt. Dazu sei $(z_v)_{v\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D_{n+2} \cap U_j$, welche gegen einen Punkt $z \in D_{n+2} \cap U_j$ konvergiert. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, gibt es ein $k \in I$ mit $z \in U_k$. Da U_k offen ist, gilt $z_v \in D_{n+2} \cap \overline{U}_j \cap U_k$ für genügend große v. Wegen (3.41) haben wir, für $t \in [0,1]$, die Gleichung

$$\tilde{f}_{n,j}(t, z_v) = \tilde{f}_{n,k}(t, z_v) f_{jk}^{-1}(t, z_v).$$

Da sowohl $\tilde{f}_{n,k}$ als auch f_{jk} stetig auf $D_{n+2} \cap \overline{U}_j \cap U_k$ sind und $z \in D_{n+2} \cap \overline{U}_j \cap U_k$ gilt, folgt daraus, für $t \in [0,1]$, die Gleichung

$$\lim_{v \to \infty} \tilde{f}_{n,j}(t, z_v) = \tilde{f}_{n,k}(t,z) f_{jk}^{-1}(t,z).$$

Also gilt $\tilde{f}_{n,j} \in \rho\left(D_{n+2} \cap \overline{U}_j\right)$ für alle $j \in I$ und $n \in \mathbb{N}$.
Wir werden die Existenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ beweisen.
Induktionsanfang:
Wir setzen $f_{0,j} := \tilde{f}_{0,j}$ auf $[0,1] \times D_n \cap \overline{U}_j$ und erhalten, da $\tilde{f}_{0,j} \in \rho\left(D_2 \cap \overline{U}_j\right)$ und nach Voraussetzung 1 die Beziehung $D_1 \subseteq D_2$ gilt, eine stetige Abbildung $f_{0,j} : [0,1] \to \rho\left(D_1 \cap \overline{U}_j\right)$. Da jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele U_j, $j \in I$, schneidet, ist $\bigcup_{j \in I} f_{0,j}\left([0,1] \times \overline{D}_0 \cap \overline{U}_j\right)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{G}$. Dann können wir ein $\epsilon_0 > 0$ finden, so dass

$$\epsilon_0 < \frac{1}{4} \min_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_0 \cap \overline{U}_j} \operatorname{dist}\left(f_{0,j}(t,z), \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}\right),$$

für alle $j \in I$, gilt. Mit dieser Wahl der Familie $\{f_{0,j}\}_{j \in I}$ und der Zahl ϵ_0 sind die Bedingungen (3.37)-(3.40) für $n = 0$ erfüllt.
Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen an, dass wir für ein bestimmtes $p \in \mathbb{N}$ Familien
$f_0 = \{f_{0,j}\}_{j \in I}, \cdots, f_p = \{f_{p,j}\}_{j \in I}$ von Abbildungen $f_{q,j} \in \rho\left(D_{q+1} \cap \overline{U}_j\right)$, für $q \in \{0, \cdots, p\}$, sowie positive Zahlen $\epsilon_0, \cdots, \epsilon_p$ gefunden haben, so dass die Bedingungen (3.37)-(3.40) für $n = 0, \cdots, p$ erfüllt sind.
Induktionsschritt:
Da die kompakte Menge $[0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j$ in $[0,1] \times D_{p+1} \cap \overline{U}_j$ enthalten ist und der Schnitt $f_{p,j}$ stetig auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap \overline{U}_j$ ist, ist $f_{p,j}$ auf $[0,1] \times \overline{D}_{p+1} \cap \overline{U}_j$ beschränkt. Da jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele U_j, $j \in I$, schneidet, folgt daraus die Ungleichung

$$\max_{j \in I} \max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j} \|f_{p,j}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \infty. \tag{3.42}$$

Des Weiteren gilt wegen (3.41) die Gleichung

$$f_{jk} = \tilde{f}_{p,j}^{-1} \tilde{f}_{p,k}$$

auf $[0,1] \times D_{p+2} \cap U_j \cap U_k$. Zudem gilt nach der Induktionsvoraussetzung die Gleichung

$$f_{jk} = f_{p,j}^{-1} f_{p,k}$$

auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap U_j \cap U_k$.

Da nach Voraussetzung 1 die Beziehung $D_{p+1} \subseteq D_{p+2}$ gilt, folgt aus diesen beiden Gleichungen, dass

$$\tilde{f}_{p,k} f_{p,k}^{-1} = \tilde{f}_{p,j} f_{p,j}^{-1}$$

auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap U_j \cap U_k$ gilt. Folglich gibt es eine stetige Abbildung $\Phi \in \rho\left(D_{p+1}\right)$ mit der Eigenschaft

$$\Phi = \tilde{f}_{p,j} f_{p,j}^{-1} \tag{3.43}$$

auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap U_j$, für alle $j \in I$. Da für $t \in [0,1]$ der Schnitt $f_{p,j}(t)$ stetig auf $D_{p+1} \cap \overline{U}_j$ und $\tilde{f}_{p,j}$, wie oben gezeigt wurde, stetig auf $D_{p+2} \cap \overline{U}_j$ ist, gilt Gleichung (3.43) auch auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap \overline{U}_j$, für $j \in I$. Nach Voraussetzung 3 kann Φ auf $\overline{D}_p$ gleichmäßig durch Elemente aus $\rho(X)$ approximiert werden. Wegen (3.42) bedeutet dies, dass wir eine stetige Abbildung $\Psi \in \rho(X)$ finden können, so dass

$$\max_{[0,1] \times \overline{D}_p} \|\Psi\Phi - 1\|_{\mathcal{A}} < \frac{\epsilon_p}{\max_{[0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j} \left\|f_{p,j}\right\|_{\mathcal{A}}},$$

für alle $j \in I$, gilt. Da (3.43) auf $[0,1] \times D_{p+1} \cap \overline{U}_j$ und $\overline{D}_p \cap \overline{U}_j \subseteq \overline{D}_{p+1} \cap \overline{U}_j$ gilt, folgt daraus

$$\max_{[0,1] \times \overline{D}_p} \left\|\Psi \tilde{f}_{p,j} f_{p,j}^{-1} - 1\right\|_{\mathcal{A}} < \frac{\epsilon_p}{\max_{[0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j} \left\|f_{p,j}\right\|_{\mathcal{A}}}, \tag{3.44}$$

für alle $j \in I$. Wir setzen nun $f_{p+1,j} := \Psi \tilde{f}_{p,j}$ auf $[0,1] \times D_{p+2} \cap \overline{U}_j$ und erhalten so eine Familie $f_{p+1} = \{f_{p+1,j}\}_{j \in I}$ von stetigen Abbildungen $f_{p+1,j} \in \rho\left(D_{p+2} \cap \overline{U}_j\right)$. Da jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele U_j, $j \in I$, schneidet, ist für jedes $t \in [0,1]$ die Menge $\bigcup_{j \in I} f_{p+1,j}(t)\left(\overline{D}_{p+1} \cap \overline{U}_j\right)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{G}$. Folglich können wir eine Konstante $\epsilon_{p+1} > 0$ finden, die so klein ist, dass (3.38) für $n = p+1$ gilt. Da $\epsilon_p > 0$ gilt, können wir zudem annehmen, dass auch (3.40) für $n = p+1$ gilt. Wegen (3.41) haben wir

$$f_{p+1,j}^{-1} f_{p+1,k} = \tilde{f}_{p,j}^{-1} \Psi^{-1} \Psi \tilde{f}_{p,k} = \tilde{f}_{p,j}^{-1} \tilde{f}_{p,k} = f_{jk}$$

auf $[0,1] \times D_{p+2} \cap \overline{U}_j \cap \overline{U}_k$. Also gilt (3.37) für $n = p+1$. Zudem folgt aus (3.44) die Abschätzung

$$\max_{[0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j} \|f_{p+1,j} - f_{p,j}\|_{\mathcal{A}} = \max_{[0,1] \times \overline{D}_p \cap \overline{U}_j} \left\|\left(\Psi \tilde{f}_{p,j} f_{p,j}^{-1} - 1\right) f_{p,j}\right\|_{\mathcal{A}} < \epsilon_p.$$

Folglich gilt (3.39) für $n = p+1$. Dies beendet den Beweis. □

Lemma 3.39. *Sei $Q \subseteq X$ ein abgeschlossenes Quadrat, und sei f ein 1-Kozyklus mit Werten in der Garbe ρ. Dann gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq X$ von Q, so dass f über W zerfällt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so dass f zu $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \rho)$ (vgl. Anhang) gehört. Nach Satz 3.36 gibt es offene Quadrate $Q_1, \cdots, Q_N$ mit den dort formulierten Eigenschaften 1, 2 und 3. Wegen Eigenschaft 1 besitzt dann jedes $\overline{Q}_n$ eine Umgebung U_n, die zu $\mathcal{U}$ gehört. Da f zu $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \rho)$ gehört, folgt daraus, dass f über jedem U_n zerfällt. Mit Satz 4.12 folgt daraus, dass f über $U_1 \cup U_2$ zu einem 1-Kozyklus aus

$$\mathcal{Z}^1\left(\{U_1, U_2\}, \rho\right)$$

äquivalent ist. Da wegen Eigenschaft 2 das Paar (Q_1, Q_2) ein Cartansches Paar ist, können wir durch Vergrößerung ein Cartansches Paar (Q'_1, Q'_2) finden, mit den Eigenschaften $\overline{Q}_j \subseteq Q'_j$ und $\overline{Q'}_j \subseteq U_j$. Zusammen mit Aussage 1 aus Satz 3.21 folgt daraus, dass f über $Q'_1 \cup Q'_2$ zerfällt. Wir wiederholen dieses Argument weitere $N-1$ mal und erreichen so, dass f über einer Umgebung von $\overline{Q_1 \cup \cdots \cup Q_N}$ zerfällt. Da dies, wegen Eigenschaft 3, eine Umgebung von Q ist, ist damit der Beweis beendet. □

Wir kommen nun zur Hauptaussage für die Garbe ρ.

Satz 3.40. *Jeder* 1*-Kozyklus mit Werten in der Garbe* ρ *zerfällt.*

Beweis. Nach Satz 3.32 können wir X mit einer Kette $(A_j)_{j \in \mathbb{N} \subseteq \{0\}}$ von einfachen Erweiterungen ausschöpfen. Dann folgt aus (3.23) die Existenz einer Teilfolge $(A_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(A_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, so dass

$$\overline{A}_{j_1} \cup \cdots \cup \overline{A}_{j_n} \subseteq A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_{n+1}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, gilt. Wir setzen

$$D_n = A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Bedingungen 1 und 2 in Lemma 3.38 erfüllt.
Wir wollen nun zeigen, dass Bedingung 3 aus Lemma 3.38 gegeben ist. Seien $f \in \rho\left(D_{n+1}\right)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden nun Teil 2 von Satz 3.21 endlich oft an und erhalten somit eine Abbildung $f_0 \in \rho(D_{n+2})$ mit der Eigenschaft

$$\max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_n} \|f(t,z) - f_0(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Auf die gleiche Weise können wir ein $f_1 \in \rho(D_{n+3})$ mit der Eigenschaft

$$\max_{(t,z) \in [0,1] \times \overline{D}_{n+1}} \|f_0(t,z) - f_1(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \frac{\epsilon}{4}$$

finden.

Wir wiederholen dieses Anwenden nun endlich oft und erhalten somit eine Folge $(f_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ von Elementen $f_\mu \in \rho\left(D_{n+2+\mu}\right)$ mit der Eigenschaft

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_{n+\mu+1}} \|f_\mu(t,z) - f_{\mu+1}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \frac{\epsilon}{2^{\mu+1}},$$

für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Aus diesen Abschätzungen folgt, dass auf jeder kompakten Teilmenge von $[0,1] \times X$ die Folge $(f_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ von einer gewissen Stelle ab gleichmäßig gegen eine Abbildung $\widetilde{f} \in \rho(X)$ konvergiert, so dass

$$\max_{(t,z)\in[0,1]\times\overline{D}_n} \|f(t,z) - \widetilde{f}(t,z)\|_{\mathcal{A}} < \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{\mu+1}} = \epsilon$$

gilt. Also ist Bedingung 3 aus Lemma 3.38 erfüllt.
Wir müssen also noch zeigen, dass auch Bedingung 4 aus Lemma 3.38 gilt. Dazu genügt es zu zeigen, dass f über einer gewissen Umgebung eines jeden $\overline{A}_j$ zerfällt. Letzteres zeigen wir durch vollständige Induktion. Das f über einer Umgebung von $\overline{A}_1$ zerfällt, folgt aus Lemma 3.39, da $\overline{A}_1$ ein abgeschlossenes Quadrat in X ist. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen, wir haben für ein $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bereits gezeigt, dass f über einer Umgebung von $\overline{A}_j$ zerfällt.

Induktionsschritt:
Da A_{j+1} eine einfache Erweiterung von A_j ist, gibt es ein Quadrat U, so dass (A_j, U) ein Cartansches Paar mit der Eigenschaft $A_{j+1} = A_j \cup U$ ist. Nach Lemma 3.39 zerfällt f über einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\overline{U}$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt das Gleiche über einer Umgebung $\widetilde{A}_j$ von $\overline{A}_j$. Nach Satz 4.12 ist $f\big|_{\widetilde{A}_j\cup\widetilde{U}}$ äquivalent zu einem Kozyklus $\widetilde{f} \in \mathcal{Z}^1\left(\{\widetilde{A}_j, \widetilde{U}\}, \rho\right)$. Da (A_j, U) ein Cartansches Paar ist, können wir, durch eventuelle Vergrößerung von A_j und U, ein Cartansches Paar (A'_j, U') finden, so dass $\overline{A}_j \subseteq A'_j$, $\overline{A}'_j \subseteq \widetilde{A}_j$, $\overline{U} \subseteq U'$ und $\overline{U}' \subseteq \widetilde{U}$ gelten. Aus Teil 1 von Satz 3.21 folgt dann, dass der Kozyklus $\widetilde{f}$ über $A'_j \cup U'$ und somit über einer Umgebung von $\overline{A}_{j+1}$, zerfällt. Da $\tilde{f}$ zu $f\big|_{\tilde{A}_j\cup\tilde{U}}$ äquivalent ist, folgt daraus, dass auch f über $\tilde{A}_j \cup \tilde{U}$ zerfällt. Dann folgt die zu zeigende Aussage aus Lemma 3.38. Dies beendet den Beweis. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun einen weiteren Teil unseres Hauptresultates aus Kapitel 3.2 zeigen.

Beweis von Teil 2 von Satz 3.13. Nach Lemma 3.15 genügt es den Beweis für die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ zu führen. Sei also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und sei $f \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)$ ein Kozyklus, der als $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus zerfällt.
Wir wählen eine Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ von X, so dass für jedes $i \in I$ die Menge V_i eine offene Kreisscheibe in X ist und Folgendes gilt:

- $\mathcal{V}$ ist eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$.
- Ist V eine Kreisscheibe aus $\mathcal{V}$ und ist p der Mittelpunkt von V, so gilt $m = 0$ auf $V \setminus \{p\}$.
- Für jede Kreisscheibe V aus $\mathcal{V}$ ist $\mathcal{G}\big|_V$ holomorph isomorph zum Produktbündel $V \times G$.

Zudem wählen wir einen Kozyklus $v = \left\{v_{ij}\right\}_{i,j \in I} \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{V}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)$, der von f induziert ist. Da f als $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus zerfällt, zerfällt nach Folgerung 4.10 der Kozyklus v ebenfalls als $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus. Es gibt also eine Familie $\{c_i\}_{i \in I}$ von Schnitten $c_i \in \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i)$ mit der Eigenschaft

$$v_{ij} = c_i c_j^{-1} \tag{3.45}$$

auf $V_i \cap V_j$. Wir werden nun eine Familie $\{C_i\}_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen

$$C_j : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,0}(V_i)$$

konstruieren, für die

$$C_i(0) = c_i \tag{3.46}$$

und $C_i(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt. Sei also ein $i \in I$ gegeben und sei p der Mittelpunkt von V_i. Zudem sei

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{V_i} \to V_i \times G$$

ein holomorpher Isomorphismus und $c_i^{\phi} : V \to G$ sei die stetige Funktion mit

$$\phi\left(c_i(z)\right) = \left(z, c_i^{\phi}(z)\right),$$

für $z \in V_i$. Da $m = 0$ auf $V_i \setminus \{0\}$ gilt, erhalten wir durch

$$C_i(t,z) := \phi^{-1}\left(z, c_i^{\phi}\left(p + (t-1)(p-z)\right)\right),$$

für $0 \leq t \leq 1$, eine stetige Abbildung

$$C_i : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,0}(V_i)$$

mit der Eigenschaft $C_i(0) = c_i$, so dass für alle $z \in V_i$, gilt:

$$\phi\left(C_i(1)\right) = \left(z, c_i^{\phi}(p)\right).$$

Insbesondere ist $C_i(1)$ holomorph auf V. Falls zudem auch noch $m(p) = 0$ und somit auch $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i) = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(V_i)$ gilt, sind wir nach der Definition von $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ fertig. Falls $m(p) > 0$ gilt, liegt $C_i(1)$ in $G_1\mathcal{A}_p$, d.h. $c_i^{\phi}(1) \in G_1 A$. Wir können folglich eine stetige Funktion $\gamma : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to G$ finden, so dass
$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = c_i^{\phi}(1)$ und $\gamma(1) = 1$ gelten. Dann liefert

$$C'(t,z) := \begin{cases} C\,(2t) & \text{für} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \phi^{-1}\left((z, \gamma(t)\right) & \text{für} \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

eine stetige Abbildung $C' : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wir definieren nun durch

$$F_{ij}(t,z) := C_i^{-1}(t,z) v_{ij}(z) C_j(t,z), \tag{3.47}$$

für $(t,z) \in [0,1] \times V_i \cap V_j$, eine Familie $F = \left\{F_{ij}\right\}_{i,j \in I}$ von stetigen Abbildungen

$$F_{ij} : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i \cap V_j).$$

Aus (3.45) und (3.46) folgt dann

$$F_{ij}(0) = c_i^{-1}(z) v_{ij}(z) c_j(z) = 1.$$

Da $C_i(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ gilt, folgt daraus, wegen $v_{ij} \in \mathcal{O}\mathcal{G}_{m,1}(V_i \cap V_j)$, die Gleichung

$$F_{ij}(1) = C_i^{-1}(1) v_{ij} C_j(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i \cap V_j).$$

Also ist F ein 1-Kozyklus mit Werten in der Garbe ρ. Nach Satz 3.40 zerfällt dieser Kozyklus. Es gibt also stetige Abbildungen

$$F_i : [0,1] \to \mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i)$$

mit den Eigenschaften $F_i(0) = 1$ und

$$F_i(1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i),$$

so dass

$$F_{ij} = F_i F_j^{-1}$$

auf $[0,1] \times (V_i \cap V_j)$ gilt. Insbesondere gilt dann, nach Definition der F_{ij}, siehe Definition 3.47, die Gleichung

$$F_i(1) F_j^{-1}(1) = F_{ij}(1) = C_i(1) v_{ij}(1) C_j(1).$$

Daraus folgt

$$v_{ij} = \left(C_i(1) F_i(1)\right) \left(C_j(1) F_j(1)\right)^{-1}$$

auf $V_i \cap V_j$. Da sowohl die Schnitte $F_i(1)$ als auch die Schnitte $C_i(1)$ zu $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}(V_i)$ gehören, folgt daraus, dass v als $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus zerfällt. Nach Folgerung 4.10 folgt daraus, dass auch f als $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-Kozyklus zerfällt. Dies beendet den Beweis. $\square$

3.6 Verdrillte Bündel

Wir werden in diesem Abschnitt die Methode des Verdrillens von Bündeln vorstellen und mit ihr Teil 3 von Satz 3.13 zeigen. Im Verlauf des gesammten Kapitels sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{A}$ ein holomorphes, inneres Banachalgebra-Bündel über X mit der charakteristischen Faser A und G eine offene Untergruppe von GA. Zudem sei $\mathcal{G} \subseteq G\mathcal{A}$ ein holomorphes G-Bündel über X. Wir folgen dabei einer Idee von H. Grauert wie sie z. B. in [HL], Abschnitt 3.8. angewendet wird.

Definition 3.41. *Sei $\{(\Theta_i, U_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Zudem sei $g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ ein Kozyklus aus $\mathcal{Z}\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}\right)$. Dann können wir über $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}\big|_{U_i} \times \{i\}$ die folgende Äquivalenzrelation einführen. Wir sagen, dass $(z, v, i) \in \mathcal{A}\big|_{U_i} \times \{i\}$ und $(z', v', j) \in \mathcal{A}\big|_{U_j} \times \{j\}$ äquivalent zueinander sind, wenn $z = z'$ und $v' = g_{ji}(z)\,(v)\,g_{ij}(z)$ gilt.*
Die dazu gehörende Menge von Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^g$. Seien nun, für jedes $i \in I$, die Abbildungen

$$J_i : \mathcal{A}\big|_{U_i} \times \{i\} \to \mathcal{A}^g\big|_{U_i},$$

die jedem Tripel $(z, v, i) \in \mathcal{A}\big|_{U_i} \times \{i\}$ die Äquivalenzklasse von (z, v, i) in $\mathcal{A}^g$ zuordnen, gegeben. Wir versehen die Menge $\mathcal{A}^g$ mit der eindeutig bestimmten Struktur, welche aus jedem J_i, $i \in I$, einen inneren Isomorphismus macht. Das so entstehende holomorphe, innere Banachalgebra-Bündel bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathcal{A}^g$ und nennen es das **durch** *g* **verdrillte Bündel von** *$\mathcal{A}$. Wir nennen diese inneren Isomophismen $\{J_i\}_{i\in I}$ die* **kanonischen Isomorphismen von** *$\mathcal{A}^g$.*
Des Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^g \subseteq G\mathcal{A}^g$ das holomorphe G-Bündel über X, mit der Eigenschaft

$$J_i\left(\mathcal{G}\big|_{U_i} \times \{i\}\right) = \mathcal{G}^g\big|_{U_i},$$

für alle $i \in I$. Ist $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$, dann bezeichnen wir die Untergarbe $\mathcal{F}^g$ von $\mathcal{C}^{\mathcal{G}^g}$, mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in I$ und jede offene Menge $U' \subseteq U_i$ die Gruppe $\mathcal{F}^g(U')$ genau die Schnitte $f^g : U' \to \mathcal{G}^g$ enthält, für die es einen Schnitt $f \in \mathcal{F}(U')$ gibt, so dass $f^g = J_i(f)$ gilt, als die **durch** *g* **verdrillte Garbe von** *$\mathcal{F}$.*
Sei nun $h \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, dann nennen wir die 0-Kokette $h^g \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}^g)$ mit der Eigenschaft

$$h_i^g = J_l\left(g_{li} h_i g_{il}\right), \tag{3.48}$$

für alle $i, l \in I$, die **durch** *g* **verdrillte 0-Kokette von** *h. Ist $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, dann nennen wir den Kozyklus $f^g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^g)$, mit der Eigenschaft*

$$J_l\left(g_{li} f_{ij} g_{jl}\right) = f_{ij}^g, \tag{3.49}$$

für alle $i, j, l \in I$, den **durch** *g* **verdrillten Kozyklus von** *f.*

Bemerkung 3.42. *Es ist leicht zu sehen, dass folgende Gleichungen gelten:*

1. $\left(\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)^g = \mathcal{C}^{\mathcal{G}^g}_{m,1}$.
2. $\left(\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)^g = \mathcal{O}^{\mathcal{G}^g}_{m,1}$.

Satz 3.43. *Sei $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$ und seien $f, g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Zudem sei $\mathcal{F}^g$ die durch g verdrillte Garbe von $\mathcal{F}$. Dann sind f und g genau dann $\mathcal{F}$-äquivalent zueinander, wenn $f^g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^g)$ $\mathcal{F}^g$-trivial ist.*

Beweis. Zunächst folgt aus der Gleichung (3.49), zusammen mit der Kozykluseigenschaft von g, dass

$$1 = J_l(1) = J_l(g_{li}g_{il}) = J_l\left(g_{li}g_{ij}g_{jl}\right) = g^g_{ij} \tag{3.50}$$

über $U_l \cap U_i \cap U_j$, für alle $i, j, l \in I$, gilt. Zudem gilt für jede 0-Kokette $h \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ die Gleichung

$$\left(h_i f_{ij} h_j^{-1}\right)^g_{ij} = (h_i)^g_{ij} (f_{ij})^g_{ij} \left(h_j^{-1}\right)^g_{ij} \tag{3.51}$$

über $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$. Denn wegen den Gleichungen (3.48), (3.49) und der Kozykluseigenschaft von g haben wir

$$\begin{aligned}
\left(h_i f_{ij} h_j^{-1}\right)^g_{ij} &= J_l\left(g_{li} h_i f_{ij} h_j^{-1} g_{jl}\right) \\
&= J_l\left(g_{li} h_i g_{il} g_{li} f_{ij} g_{jl} g_{lj} h_j^{-1} g_{jl}\right) \\
&= J_l\left(g_{li} h_i g_{il}\right) J_l\left(g_{li} f_{ij} g_{jl}\right) J_l\left(g_{lj} h_j^{-1} g_{jl}\right) \\
&= (h_i)^g_i (f_{ij})^g_{ij} \left(h_j^{-1}\right)^g_j,
\end{aligned}$$

über $U_i \cap U_j \cap U_l$, für alle $i, j, l \in I$.
Angenommen, f, g sind $\mathcal{F}$-äquivalent zueinander, dann gibt es eine 0-Kokette $h \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft

$$f_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$$

über $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$. Also gilt wegen den Gleichungen (3.50) und (3.51) die Gleichung

$$(f_{ij})^g_{ij} = \left(h_i g_{ij} h_j^{-1}\right)^g_{ij} = (h_i)^g_i (g_{ij})^g_{ij} \left(h_j^{-1}\right)^g_j = (h_i)^g_i \left(h_j^{-1}\right)^g_j$$

über $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$. Also ist f^g $\mathcal{F}^g$-trivial.

Nehmen wir nun an, dass f^g $\mathcal{F}^g$-trivial ist. Dann gibt es eine 1-Kokette $h^g \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^g)$ mit der Eigenschaft

$$f^g_{ij} = h^g_i \left(h_j^{-1}\right)^g_j \tag{3.52}$$

über $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$. Also gilt aufgrund der Gleichungen (3.50), (3.51) und der Kozykluseigenschaft von g die Gleichung

$$f^g_{ij} = h^g_i g^g_{ij} \left(h_j^{-1}\right)^g_j = \left(h_i g_{ij} h_j^{-1}\right)^g_{ij}$$

über $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$. Also gilt

$$J_l\left(g_{li} f_{ij} g_{jl}\right) = J_l\left(g_{li} h_i g_{ij} h_j^{-1} g_{jl}\right)$$

über $U_i \cap U_j \cap U_l$, für alle $i, j, l \in I$. Da J_l ein Isomorphismus ist, folgt daraus die Gleichung

$$f_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$$

über $U_i \cap U_j \cap U_l$, für alle $i, j, l \in I$. Diese gilt insbesondere auch für $l = j$. Also sind f und g $\mathcal{F}$-äquivalent. Dies beendet den Beweis. □

Beweis von Teil 3 von Satz 3.13. Nach Lemma 3.15 genügt es den Fall $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$ zu betrachten. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und seien $f, g \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)$ zwei $\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalente Kozyklen. Dann ist der Kozyklus $f^g \in \mathcal{Z}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}^{\mathcal{G}^g}_{m,1}\right)$ nach Satz 3.43 $\left(\mathcal{C}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)^g$-trivial und nach Bemerkung 3.42 auch $\mathcal{C}^{\mathcal{G}^g}_{m,1}$-trivial. Dann ist nach Teil 2 von Satz 3.13, den wir bereits in Kapitel 3.5 bewiesen haben, der Kozyklus f^g auch $\mathcal{O}^{\mathcal{G}^g}_{m,1}$-trivial und folglich $\left(\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}\right)^g$-trivial. Also sind nach Satz 3.43 die Kozyklen f, g $\mathcal{O}^{\mathcal{G}}_{m,1}$-äquivalent. Dies beendet den Beweis. □

4 Anhang: Abstrakte Garben

Wir geben in diesem Anhang eine Reihe von Definitionen an, welche in der Hauptarbeit des Öfteren benutzt werden. Dabei sind die Begriffe Garbe und Kozyklus besonders wichtig. Zudem werden zwei wichtige Eigenschaften von Kozyklen, die Sätze 4.9 und 4.12, formuliert und bewiesen.

Definition 4.1. *Sei T ein beliebiger topologischer Raum. Eine* **Garbe von Gruppen** *über T ist eine Abbildung $\mathcal{F}$, die jeder offenen Menge $U \subseteq T$ eine Gruppe $\mathcal{F}(U)$ (eventuell nicht-abelsch) zuordnet sowie eine zweite Abbildung, die jedem Paar von offenen Mengen $U \subseteq V \subseteq T$ einen Gruppen-Homomorphismus $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), f \to f\big|_V$ zuordnet, so dass Folgendes gilt:*

1. *$\mathcal{F}(\emptyset)$ ist die Gruppe, die nur das neutrale Element enthält.*
2. *Für jede offene Menge $U \subseteq T$ und jedes $f \in \mathcal{F}(U)$ gilt $f\big|_U = f$.*
3. *Für je drei offene Mengen $W \subseteq V \subseteq U$ und jedes $f \in \mathcal{F}(U)$ gilt*

$$(f|_V)\big|_W = f\big|_W.$$

4. *Für jede Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Teilmengen von T und jede Familie von Elementen $f_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$, mit*

$$f_i\big|_{U_i\cap U_k} = f_k\big|_{U_i\cap U_k},$$

   für alle $i, k \in I$, gibt es ein Element $f \in \mathcal{F}(\bigcup_{i\in I} U_i)$ mit $f\big|_{U_i} = f_i$.

5. *Sei $\{V_i\}_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen mit*

$$\bigcup_i V_i = U$$

   und seien $f, g \in \mathcal{F}(U)$ mit $f\big|_{V_j} = g\big|_{V_j}$, für $j \in I$. Dann gilt $f = g$.

Wir nennen die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ die **Schnitte von** *$\mathcal{F}$ und den Gruppen-Homomorphismus $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ den* **Einschränkungs-Homomorphismus** *von $\mathcal{F}(U)$ auf $\mathcal{F}(V)$. Eine Garbe $\mathcal{G}$ über T heißt* **Untergarbe** *einer Garbe $\mathcal{F}$ über T, wenn $\mathcal{G}(U)$ für jede offene Teilmenge von T eine Untergruppe von $\mathcal{F}(U)$ ist und die Einschränkungs-Homomorphismen von $\mathcal{G}$ die Einschränkungen der entsprechenden Einschränkungs-Homomorphismen von $\mathcal{F}$ sind.*

Beispiel 4.2. *Sei E ein Banachraum und sei $GL(E)$ die Gruppe aller stetigen, invertierbaren und linearen Abbildungen von E nach E. Sei T ein topologischer Raum. Dann ist die Abbildung $\mathcal{C}^E$, welche jeder offenen Untermenge $U \subseteq T$ die Gruppe $\mathcal{C}^E(U)$ aller stetigen Abbildungen $f : U \to E$ zuordnet, eine Garbe von Gruppen über T. Zudem ist die Abbildung $\mathcal{C}^{GL(E)}$, welche jeder offenen Menge $U \subseteq T$ die Gruppe $\mathcal{C}^{GL(E)}(U)$ aller stetigen Abbildungen $g : U \to GL(E)$ zuordnet, ebenfalls eine Garbe von Gruppen über T. Des Weiteren ist die Abbildung $\mathcal{O}^E$, welche jeder offenen Teilmenge $U \subseteq T$ die Gruppe $\mathcal{O}^E(U)$ aller holomorphen Abbildungen $f : U \to E$ zuordnet, eine Untergarbe von $\mathcal{C}^E$ über T. Entsprechend ist $\mathcal{O}^{GL(E)}$ eine Untergarbe von $\mathcal{C}^{GL(E)}$ über T.*
Sei A eine Banachalgebra und GA die Gruppe ihrer invertierbaren Elemente, dann ist die Abbildung $\mathcal{O}^{GA}$, welche jeder offenen Teilmenge $U \subseteq T$ die Gruppe $\mathcal{O}^{GA}(U)$ aller holomorphen Abbildungen $f : U \to GA$ zuordnet, eine Garbe von Gruppen über T.

Definition 4.3. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von T. Wir definieren die* **Mengen der Koketten** *durch*

1. $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{i\in I}\mathcal{F}(U_i)$.
2. $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

*Die Elemente von $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $p \in \{1, 2\}$, heißen p-***Koketten** *von $\mathcal{F}$ zur Überdeckung $\mathcal{U}$.*

Definition 4.4. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von T. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ die Menge aller Familien $\{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ aus $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft*

$$f_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} f_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = f_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k}. \tag{4.1}$$

Die Elemente von $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ nennen wir **Kozyklen**. *Den Kozyklus $\{f_{ij}\}$ mit der Eigenschaft $f_{ij} = 1$, für alle $i, j \in I$, nennen wir den* **1-Kozyklus**.

Bemerkung 4.5. *Aus der Eigenschaft (4.1) folgt direkt, dass für alle $i, j \in I$ die Gleichungen*

$$f_{ii} = 1$$

und

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}$$

gelten. Gleichungen in der Form von (4.1) schreiben wir vereinfacht in der Form

$$f_{ij} f_{jk} = f_{ik}.$$

Definition 4.6. *Sei T ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von T. Sei zudem $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über T. Seien zudem $f = \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ und $g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ zwei Kozyklen aus $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Wir nennen f und g* **äquivalent** *(oder genauer $\mathcal{F}$-**äquivalent**) zueinander, wenn es eine Familie $\{h_i\}_{i\in I}$ von Schnitten $h_j \in \mathcal{F}(U_j)$, für $j \in I$, gibt, mit der Eigenschaft*

$$g_{jk} = h_j f_{jk} h_k^{-1}$$

auf $U_j \cap U_k$, für alle $j, k \in I$. Wir nennen einen Kozyklus $f = \{f_{ij}\}_{i,j\in I}$ aus $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, der äquivalent zum 1-Kozyklus ist, **trivial** *(oder $\mathcal{F}$-**trivial**).*

Definition 4.7. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T. Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von T und sei Y eine offene Teilmenge von T. Mit $\mathcal{F}\big|_Y$ bezeichnen wir die Garbe von Gruppen, die jeder offenen Teilmenge U von Y die Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet. Wir setzen zunächst*

$$\mathcal{U} \cap Y := \{U_i \cap Y\}_{i\in I}.$$

Wir definieren:

1. *Sei $g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ein Kozyklus. Mit $g\big|_Y$ bezeichnen wir den Kozyklus aus $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$, welcher durch*

$$\left(g\big|_Y\right)_{jk} = (g_{jk})\,|_{U_j \cap U_k \cap Y},$$

   für $j, k \in I$, gegeben ist.
   Man nennt $g\big|_Y$ die **Einschränkung** *von g auf Y. Wir sagen zudem, dass g* **trivial über** *Y ist, wenn $g\big|_Y$ trivial ist. Wir sagen des Weiteren, dass der Kozyklus g über Y* **zerfällt**, *wenn er trivial über Y ist.*
2. *Seien $g_1, g_2 \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ zwei Kozyklen. Wir nennen g_1 und g_2* **äquivalent über** *Y, wenn $(g_1)\big|_Y$ und $(g_2)\big|_Y$ äquivalent sind.*

Definition 4.8. *Seien $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ offene Überdeckungen eines topologischen Raumes T, so dass $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Das heißt, dass es eine Abbildung $\tau : J \to I$ gibt, so dass $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$ für jedes $j \in J$ gilt. Sei zudem $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über T.*
Wir definieren für jedes $g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ einen Kozyklus $\tau^* g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, indem wir

$$(\tau^* g)_{jk} = g_{\tau(j)\tau(k)}$$

auf $V_j \cap V_k$, für $j, k \in J$, setzen.
Wir nennen einen Kozyklus $\breve{g} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ **induziert** *von $g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, wenn es eine Abbildung $\tau : I \to J$ gibt, so dass $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$ und $\breve{g} = \tau^* g$ gilt.*

Satz 4.9. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T. Seien zudem $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ und $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ offene Überdeckungen von T, so dass $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Sind $f, g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, so dass $\tilde{f}$ von f und $\tilde{g}$ von g induziert ist, so ist Folgendes äquivalent:*

1. *f und g sind äquivalent.*
2. *$\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind äquivalent.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Abbildungen $\tau, \phi : J \to I$, so dass $\tilde{f} = \tau^* f$ und $\tilde{g} = \phi^* g$ gilt. Angenommen, f und g sind äquivalent, dann gibt es Schnitte $h_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$, so dass

$$h_i^{-1} f_{ij} h_j = g_{ij} \tag{4.2}$$

auf $U_i \cap U_j$, für alle $i, j \in I$, gilt. Nun definieren wir Schnitte $\tilde{h}_\mu \in \mathcal{F}(V_\mu), \mu \in J$, indem wir

$$\tilde{h}_\mu := h_{\tau(\mu)} g_{\tau(\mu)\phi(\mu)}$$

auf V_μ setzen. Dann gilt

$$\tilde{h}_\nu^{-1} \tilde{f}_{\nu\mu} \tilde{h}_\mu = g_{\tau(\nu)\phi(\nu)}^{-1} h_{\tau(\nu)}^{-1} f_{\tau(\nu)\tau(\mu)} h_{\tau(\mu)} g_{\tau(\mu)\phi(\mu)}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu$. Nach (4.2) folgt daraus

$$\tilde{h}_\nu^{-1} \tilde{f}_{\nu\mu} \tilde{h}_\mu = g_{\tau(\nu)\phi(\nu)}^{-1} g_{\tau(\nu)\tau(\mu)} g_{\tau(\mu)\phi(\mu)}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu$. Da g ein Kozyklus ist, folgt daraus weiter

$$\tilde{h}_\nu^{-1} \tilde{f}_{\nu\mu} \tilde{h}_\mu = g_{\phi(\nu)\phi(\mu)} = \tilde{g}_{\nu\mu}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu$. Folglich sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ äquivalent.
Nehmen wir nun an, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ äquivalent sind. Dann gibt es Schnitte $\tilde{h}_\mu \in \mathcal{F}(V_\mu), \mu \in J$, mit

$$\tilde{h}_\nu^{-1} \tilde{f}_{\nu\mu} \tilde{h}_\mu = \tilde{g}_{\nu\mu}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu \neq \emptyset$. Da $\tilde{f} = \tau^* f$ und $\tilde{g} = \phi^* g$ gilt, folgt daraus

$$\tilde{h}_\nu^{-1} f_{\tau(\nu)\tau(\mu)} \tilde{h}_\mu = g_{\phi(\nu)\phi(\mu)}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu$. Da f und g Kozyklen sind, folgt daraus, dass

$$\tilde{h}_\nu^{-1} f_{\tau(\nu)j} f_{j\tau(\mu)} \tilde{h}_\mu = g_{\phi(\nu)j} g_{j\phi(\mu)}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu \cap U_j \neq \emptyset, j \in I$, gilt.

Des Weiteren gilt, da $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, die Gleichung

$$f_{j,\tau(\mu)}\tilde{h}_\mu g_{\phi(\mu)j} = f_{j\tau(\nu)}\tilde{h}_\nu g_{\phi(\nu)j}$$

auf $V_\nu \cap V_\mu \cap U_j$. Damit können wir nun Schnitte $h_j \in \mathcal{F}(U_j), j \in I$, definieren, indem wir

$$h_j := f_{j\tau(\mu)}\tilde{h}_\mu g_{\phi(\mu)j}$$

auf $V_\mu \cap U_j \neq \emptyset$ setzen. Benutzt man erneut die Kozyklenbedingung von f und g erhält man

$$h_j^{-1} f_{jk} h_k = g_{j\phi(\mu)}\tilde{h}_\mu^{-1} f_{\tau(\mu)j} f_{jk} f_{k\tau(\mu)}\tilde{h}_\mu g_{\phi(\mu)k}.$$

Also gilt

$$h_j^{-1} f_{jk} h_k = g_{j\phi(\mu)}\tilde{h}_\mu^{-1}\tilde{h}_\mu g_{\phi(\mu)k} = g_{jk}.$$

Dies beendet den Beweis. □

Folgerung 4.10. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T und seien $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ offene Überdeckungen von T, so dass $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Ist $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $\tilde{f} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, so dass $\tilde{f}$ von f induziert ist, so ist Folgendes äquivalent:*

1. *f ist trivial.*
2. *$\tilde{f}$ ist trivial.*

Beweis. Sei g der 1-Kozyklus. Dann liefert Satz 4.9 das Gewünschte. □

Aufgrund von Satz 4.9 ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 4.11. *Sei T ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über T. Unter einem* **Kozyklus mit Werten in** $\mathcal{F}$ *(oder* $\mathcal{F}$**-Kozyklus***) verstehen wir ein Paar $(f, \mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von T ist und $f \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ gilt.*
Zwei $\mathcal{F}$-Kozyklen $(f, \mathcal{U})$ und $(g, \mathcal{V})$ heißen **äquivalent** *(oder genauer* $\mathcal{F}$**-äquivalent***), wenn es eine Überdeckung $\mathcal{W}$ gibt, die sowohl $\mathcal{U}$ als auch $\mathcal{V}$ verfeinert, so dass Folgendes gilt:*
Sind die Kozyklen $\tilde{f} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ und $\tilde{g} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ durch f bzw. g induziert, so sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ äquivalent.

Satz 4.12. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Gruppen über einem topologischen Raum T.*
Seien $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ zwei offene Überdeckungen von T und sei $g \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ein Kozyklus, der trivial über jedem U_i ist.
Dann gibt es einen Kozyklus $\tilde{g} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ der $\mathcal{F}$-äquivalent zu g ist.

Beweis. Wir wählen für jedes $j \in I$ eine offene Überdeckung $\mathcal{W}_j = \{W_{j\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von U_j, die so fein ist, dass $\mathcal{W} := \{W_{j\nu}\}_{(j,\nu)\in I\times\mathbb{N}}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ ist.
Sei nun $g' = \{g_{j\mu,k\nu}\}_{(j,\nu),(k,\mu)\in I\times\mathbb{N}} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{W},\mathcal{F})$ ein Kozyklus, der von g induziert ist. Dann sind g und g' nach Definition 4.11 $\mathcal{F}$-äquivalent zueinander. Folglich genügt es uns zu zeigen, dass g' $\mathcal{F}$-äquivalent zu einem Kozyklus aus $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ist.
Nach Definition 4.11 ist, für jedes U_j, der Kozyklus $g\big|_{U_j}$ $\mathcal{F}$-äquivalent zu $g'\big|_{U_j}$. Da $g\big|_{U_j}$ $\mathcal{F}$-trivial ist, ist nach Folgerung 4.10 auch $g'\big|_{U_j}$ $\mathcal{F}$-trivial. Folglich gibt es eine Familie $h_{j\nu} \in \mathcal{F}(W_{j\nu})$, für $j \in I$, so dass

$$h_{j\nu}^{-1} g'_{j\nu,j\mu} h_{j\mu} = 1 \tag{4.3}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{j\mu}$ gilt. Wir setzen nun

$$g''_{j\nu,k\mu} = h_{j\nu}^{-1} g'_{j\nu,k\mu} h_{k\mu}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{k\mu}$, mit $(j,\nu),(k,\mu) \in I \times \mathbb{N}$, und erhalten auf diese Weise einen Kozyklus $g'' \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{W},\mathcal{F})$. Nach Definition 4.11 ist g'' $\mathcal{F}$-äquivalent zu g' und somit auch zu g. Mit der Kozyklus-Bedingung von g' erhalten wir

$$\begin{aligned} g''_{j\nu,k\mu} &= h_{j\nu}^{-1} g'_{j\nu,j\mu'} g'_{j\nu',k\mu'} g'_{k\mu',k\mu} h_{k\mu} \\ &= (h_{j\nu}^{-1} g'_{j\nu,j\mu'} h_{j\mu'}) h_{j\mu'}^{-1} g'_{j\nu',k\mu'} k_{k\mu'} (h_{k\mu'}^{-1} g'_{k\mu',k\mu} h_{k\mu}) \end{aligned}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{k\mu} \cap W_{j\nu'} \cap W_{k\mu'}$. Mit (4.3) folgt daraus

$$g''_{j\nu,k\mu} = h_{j\mu'}^{-1} g'_{j\mu,k\mu'} h_{k\mu'} = g''_{j\nu',k\mu'}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{k\mu} \cap W_{j\nu'} \cap W_{k\mu'}$.
Dies gibt uns die Möglichkeit, eine Familie von Abbildungen $g'''_{jk} \in \mathcal{F}\left(U_j \cap U_k\right)$, mit $j,k \in I$, zu definieren, indem wir

$$g'''_{jk} = g''_{j\nu,k\mu}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{k\mu}$, mit $j,k \in I$ und $\nu,\mu \in \mathbb{N}$, setzen. Da g'' ein Kozyklus ist, gilt

$$g'''_{jk} g'''_{kl} = g''_{j\nu,k\mu} g''_{k\mu,l\lambda} = g''_{j\nu,l\lambda} = g'''_{j,l}$$

auf $W_{j\nu} \cap W_{k\mu} \cap W_{l\lambda}$ und somit auch auf $U_j \cap U_k \cap W_l$. Also ist $g''' \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Sei nun $\tau : I \times \mathbb{N} \to I$ mit $\tau(j,\mu) = j$ gegeben. Da die Inklusion

$$W_{j\nu} \subseteq U_j = U_{\tau(j,\nu)}$$

für jedes Paar $(j,\nu) \in I \times \mathbb{N}$ gilt und da nach der Definition von g''' auch

$$g''_{j\nu,k\mu} = g'''_{jk}\big|_{W_{j\nu}\cap W_{k\mu}} = g'''_{\tau(j,\nu)\tau(k,\mu)}\big|_{W_{j\nu}\cap W_{k\mu}}$$

gilt, ist g''' von g'' induziert. Da aber g'' $\mathcal{F}$-äquivalent zu g ist, ist nach Folgerung 4.10 g''' $\mathcal{F}$-äquivalent zu g. Dies beendet den Beweis. □

Wir wollen nun noch den Fall gesondert betrachten, in dem die Gruppen $\mathcal{F}(U)$ stets kommutativ sind. Von nun an sei $\mathcal{F}$ also eine Garbe von Abelschen Gruppen und die Gruppenoperation in der Gruppe $\mathcal{F}(U)$, für $U \subseteq T$ offen, sei mit $+$ bezeichnet.

Definition 4.13. *Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben von Abelschen Gruppen über einem topologischen Raum T. Ein* **Garben-Homomorphismus** *$\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie $\{\Phi(U)\}$, für $U \subseteq T$ offen, von Gruppenhomomorphismen $\Phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, welche mit den Einschränkungshomomorphismen von $\mathcal{F}$ kommutieren.*

Definition 4.14. *Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Garben von Abelschen Gruppen über einem topologischen Raum T. Sei Φ ein Garben-Homomorphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$ und sei $U \subseteq X$ offen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Ker}_\Phi(U)$ die Gruppe aller Schnitte $f \in \mathcal{F}_1(U)$, für die $\Phi f = 0$ gilt. Die so definierte Garbe $\mathfrak{Ker}_\Phi$ von $\mathcal{F}_1$-wertigen Schnitten auf X nennen wir die* **Kerngarbe** *von Φ bzw. die Kerngarbe des durch Φ definierten Homomorphismus von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$.*
Des Weiteren bezeichnen wir mit $\mathfrak{Im}_\Phi(U)$ die Gruppe aller Schnitte $f \in \mathcal{F}_2(U)$, für die Folgendes gilt: Für jeden Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von z und einen Schnitt $g \in \mathcal{F}_1(V)$ mit $f\big|_V = \Phi g$.
Die so definierte Garbe $\mathfrak{Im}_\Phi$ nennen wir die **Bildgarbe** *von Φ.*

Definition 4.15. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Abelschen Gruppen über einem topologischen Raum T und sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von T. Wir definieren die* **Gruppen der Koketten** *durch*

1. *$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{i\in I}\mathcal{F}(U_i)$.*
2. *$C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.*
3. *Für $p \geq 1$ sei $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \dot{\bigcup}_{i_0,\cdots,i_p\in I}\mathcal{F}\left(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}\right)$.*

*Die Elemente von $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ heißen p-***Koketten** *von $\mathcal{F}$ zur Überdeckung $\mathcal{U}$.*

Definition 4.16. *Die Gruppen-Homomorphismen*

$$\delta : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

für $p \in \mathbb{N}$, die durch

$$(\delta f)_{i_0,\cdots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1} f_{i_0,\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}}$$

definiert sind, nennt man **Korandoperatoren**. *Die Kerne der Korandoperatoren bezeichnet man mit*

$$\mathcal{Z}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \left\{f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\middle|\delta f = 0\right\}.$$

*Die Elemente von $\mathcal{Z}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ heißen p-***Kozyklen** *von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$.*

Bemerkung 4.17. *Für eine* 0*-Kokette gilt nach Definition*

$$\delta(\{f_i\}_{i\in I}) = \left\{ f_i\big|_{U_i\cap U_j} - f_j\big|_{U_i\cap U_j} \right\}_{i,j\in I}.$$

Folglich gehört eine 0*-Kokette genau dann zu* $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$*, wenn* $f_i\big|_{U_i\cap U_j} = f_j\big|_{U_i\cap U_j}$ *gilt. Also kann man, wegen Teil 5 von Definition 4.1,* $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *mit* $\mathcal{F}(T)$ *identifizieren,*

$$\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(T).$$

Lemma 4.18. *Sei* $\mathcal{F}$ *eine Garbe von Abelschen Gruppen über einem topologischen Raum* T *und sei* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ *eine offene Überdeckung von* T*. Dann gilt für die Korandoperatoren die Gleichung* $\delta^2 = 0$*.*

Beweis. Sei $f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ eine p-Kokette. Dann gilt auf $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+2}}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
(\delta(\delta f))_{i_0,\cdots,i_{p+2}} &= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k(\delta f)_{i_0,\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k\left(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l f_{i_0,\cdots\hat{l}\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+2}} + \sum_{l=k+1}^{p+2}(-1)^{l-1} f_{i_0,\cdots\hat{l}\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+2}}\right) \\
&= \sum_{0\le l<k\le p+2}(-1)^{k+l} f_{i_0,\cdots\hat{l}\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+2}} - \sum_{0\le k<l\le p+2}(-1)^{k+l} f_{i_0,\cdots\hat{l}\cdots\hat{k}\cdots,i_{p+2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Das liefert den Beweis. □

Definition 4.19. *Wegen Lemma 4.18 sind die Faktorgruppen*

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \frac{\mathcal{Z}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\delta C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})},$$

für $p \geq 1$*, wohldefiniert. Wir setzen zudem* $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(T)$*. Die Gruppe* $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *heißt* p**-te (Čech-)Kohomologie-Gruppe** *der Garbe* $\mathcal{F}$ *bezüglich der Überdeckung* $\mathcal{U}$*.*

Literaturverzeichnis

[B] E. Bishop: *Analytic functions with values in a Fréchet space*, Pacific J. Math. 12 (1962), 1177-1192

[Bu] L. Bungart: *On analytic fiber bundles. I. Holomorphic fiber bundles with infinite dimensional fibers*, Topology 7 (1967), 55-68

[D] A. Douady: *Le probléme des modules pour le sous-espaces analytiques compacts d'un analytique donné*, Ann. de Inst. Fourier 16 (1966), 1-95

[FR] O. Forster, K. J. Ramspott: *Okasche Paare von Garben nicht-abelscher Gruppen*, Invent. math. 1 (1966), 260-286

[GL] I. Gohberg, J. Leiterer: *Holomorphic Operator Functions of One Variable and Applications. Methods from Complex Analysis in Several Variables*, Operator Theory: Advances and Applications 192, Birkhäuser Verlag (2009)

[Gr1] H. Grauert: *Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen*, Math. Ann. 133 (1957), 139-159

[Gr2] H. Grauert: *Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*, Math. Ann. 133 (1957), 450-472

[Gr3] H. Grauert: *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*, Math. 135 (1958), 263-273

[HL] G. Henkin, J. Leiterer: *The Oka-Grauert principle without induction over the base dimension*, Math. Ann. (1998), 71-93

[H] F. Hirzebruch: *Topological methods in Algebraic geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 131, Springer-Verlag (1966)

[K] W. Kaballo: *Meromorphic generalized inverses of operator functions*, Indag. Math., N. S., 23(4) (2012) 970-994

[L1] J. Leiterer: *Banach coherence and Oka's principle*, Part 1,Contributions to the School on Global Analysis in Ludwigsfelde near Berlin (1967), Part 2, Akad. Wiss. DDR, Berlin (1977), VI.1-VI.67

[L2] J. Leiterer: *Oka's principle for sheaves of infinite-dimensional nonabelian groups*, Complex Analysis and its Applications (Russian), Nauka, (1978), 295-317

[L3] J. Leiterer: *Local and Global Equivalence of meromorphic Operator Functions, Part I*, Math. Nachr. 83 (1978), 7-29

[L4] J. Leiterer: *Corrigendium to "Holomorphic Operator Functions of One Variable and Applications. Methods from Complex Analysis in Several Variables"*[I. Gohberg, J. Leiterer, Operator Theory: Advances and Applications 192, Birkhäuser Verlag (2009), 422 pp.], in Vorbereitung

[LR] J. Leiterer, L. Rodman: *Smoothness of generalized inverses*, Indag. Math., N. S. 23(4) (2012), 615-649

[M] B. Meisen: *Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume*, Acta math., Stockholm 108 (1962), 229-269

[O] K. Oka *Sur le fonctions analytiques de plusieurs variables. II. Deuxiéme probléme de Cousin*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A9 (1939), 7-19

[Rö] H. Röhrl: *Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Math. Ann. 133 (1957), 1-25

[Ru] W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill (1991)

[S] M. A. Shubin: *On holomorphic families of subspaces of a banach space*, Integral Equations and Operator Theory 2(3) (1979), 407-420